ARXIUS DE LES SECCIONS DE CIÈNCIES, CLII

# La conjectura de Yano

Guillem Blanco Fernández

Premi IEC de la Secció de Ciències i Tecnologia de Matemàtiques (en honor d'Assumpció Català i Poch) 2022

Institut d'Estudis Catalans

SECCIÓ DE CIÈNCIES I TECNOLOGIA

# La conjectura de Yano

ARXIUS DE LES SECCIONS DE CIÈNCIES, CLII

# La conjectura de Yano

Guillem Blanco Fernández

Premi IEC de la Secció de Ciències i Tecnologia
de Matemàtiques (en honor d'Assumpció Català i Poch) 2022

Barcelona, 2023

Institut d'Estudis Catalans | Secció de Ciències i Tecnologia

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

**Blanco Fernández, Guillem, autor**
La Conjectura de Yano. — Primera edició. — (Arxius de les seccions de ciències ; 152)
Bibliografia. — Premi IEC de la Secció de Ciències i Tecnologia de Matemàtiques
(en honor d'Assumpció Català i Poch), 2022
ISBN 9788499657066
I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia.
II. Títol III. Col·lecció: Arxius de les seccions de ciències ; 152
1. Geometria algebraica 2. Singularitats (Matemàtica)
512.7
512.761


Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: abril de 2023

Text revisat lingüísticament per la Unitat d'Edició del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imprès a Prodigitalk, SL

ISBN: 978-84-9965-706-6
Dipòsit Legal: B 7516-2023

DOI: 10.2436/10.2000.75.1

A proposta de la ponència formada pels senyors Joaquim Bruna Floris i Joan de Solà-Morales i Rubió i la senyora Marta Sanz-Solé, membres de la Secció de Ciències i Tecnologia, l'Institut d'Estudis Catalans, en sessió plenària tinguda el dia 23 de març de 2022, acordà de concedir el Premi IEC de la Secció de Ciències i Tecnologia de Matemàtiques (en honor d'Assumpció Català i Poch) al senyor Guillem Blanco Fernández pel seu treball *Bernstein-Sato polynomial of plane curves and Yano's conjecture*.

Així mateix, la Secció de Ciències i Tecnologia publica la dita obra, la qual, amb el títol *La conjectura de Yano*, és editada a cura del senyor Joaquim Bruna Floris, membre de l'Institut d'Estudis Catalans.

# Taula


| | | |
|---|---|---|
| 1. | Introducció | 9 |
| 2. | El polinomi de Bernstein-Sato | 10 |
| 3. | La fibra de Milnor i la monodromia | 11 |
| 4. | La connexió de Gauss-Manin | 12 |
| 5. | Formes diferencials relatives | 14 |
| 6. | El reticle de Brieskorn | 16 |
| 7. | La conjectura de Yano | 19 |
| 8. | Períodes integrals | 20 |
| 9. | Seccions geomètriques | 21 |
| 10. | Seccions elementals | 21 |
| 11. | Resolució de singularitats i reducció semiestable | 22 |
| 12. | Expansió asimptòtica completa | 24 |
| 13. | Períodes integrals per singularitats de corbes planes | 26 |
| 14. | *B*-exponents genèrics | 28 |
| Referències bibliogràfiques | | 29 |

## 1. Introducció

Un dels principals invariants de la teoria de singularitats algebraiques és l'anomenat *polinomi de Bernstein-Sato*. El polinomi de Bernstein-Sato és un polinomi d'una variable complexa, l'existència del qual es deriva de la teoria de $D$-mòduls [Ber72]. La importància d'aquest invariant prové del fet que molts altres invariants (monodromia [Mal75, Mal83], nombres de salt [ELSV04, BS05], espectre [BS05], funcions zeta [Ber71, Lic85, Lic89, Bla19], etc.) i altres propietats es poden recuperar a partir del polinomi de Bernstein-Sato. Malgrat la seva importància en la teoria de singularitats i en geometria biracional, el comportament de les seves arrels és encara poc conegut [Wal15, MJNB21]. La principal dificultat en l'estudi d'aquest invariant és que es tracta d'un invariant analític que depèn de l'equació que defineix la singularitat i no només del seu tipus topològic.

L'objectiu d'aquest text és fer una introducció a la teoria del polinomi de Bernstein-Sato i presentar les idees darrere la demostració [Bla21] d'una conjectura sobre l'estructura de les seves arrels en el cas de singularitats de corbes planes irreductibles. L'anomenada *conjectura de Yano*, proposada pel matemàtic japonès Tamaki Yano el 1982 [Yan82], estableix que, per a singularitats de corbes planes irreductibles, les arrels del polinomi de Bernstein-Sato es poden determinar completament a partir del tipus topològic de la singularitat, sempre que l'equació de la corba sigui suficientment genèrica.

Aquest text està organitzat de la manera següent: a la secció 2 s'introdueix la definició i algunes propietats del polinomi de Bernstein-Sato, que serà el principal objecte d'estudi. La secció 3 tracta sobre la fibra de Milnor i el concepte *monodromia*, elements que estan íntimament lligats amb el polinomi de Bernstein-Sato. A les seccions següents es fa una petita introducció al concepte *connexió* partint de l'exemple clàssic de la connexió de Gauss-Manin. A la secció 6 es presenten resultats clàssics de Brieskorn i Malgrange que relacionen la connexió de Gauss-Manin amb el polinomi de Bernstein-Sato d'una singularitat aïllada. Tots aquests conceptes ens permeten enunciar, a la secció 7, la conjectura de Yano.

Les seccions següents contenen les parts més importants de la demostració de la conjectura de Yano, començant pels períodes integrals a la fibra de Milnor introduïts a la secció 8. A la resta de seccions es poden trobar els elements més tècnics de la demostració, les seccions geomètriques i elementals, així com la resolució de singularitats i la resolució semi-estable. Totes aquestes eines es fan servir a les seccions 12 i 13 per construir l'expansió asimptòtica completa en el cas de corbes planes. Tot això permet, finalment, presentar a l'última secció un resum de com encaixen totes aquestes peces dins la demostració de la conjectura de Yano.

## 2. El polinomi de Bernstein-Sato

Sigui $R := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anell de polinomis amb coeficients complexos en $n$ variables. Denotem amb $D := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$ l'*àlgebra de Weyl*, on $\partial_i$ és l'operador de derivació parcial respecte de la variable $x_i$. Sigui $X := \mathbb{C}^n$.

L'àlgebra de Weyl és un anell no commutatiu amb les relacions $x_i \partial_j = \partial_j x_i$, si $i \neq j$ i $\partial_i x_i - x_i \partial_i = 1$ altrament. Tot element $P$ de $D$ es pot escriure com una suma finita $P = \sum_{\underline{\alpha}, \underline{\beta} \geq 0} x^{\underline{\alpha}} \partial^{\underline{\beta}}$, la *forma normal* de $P$, on $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ són multiíndexs. Si $s$ és una nova variable que commuta amb totes les $x_i, \partial_i$, definim $D[s] := D \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]$, l'anell de polinomis en $s$ amb coeficients a $D$. En aquest cas, qualsevol $P \in D[s]$ es pot escriure com a $P(s) = \sum_{i=0}^{m} s^i P_i$, on els $P_i$ són elements de $D$.

Per a qualsevol polinomi no constant $f \in R$, podem associar a les singularitats de $f = 0$ el principal invariant d'estudi d'aquest treball, el qual es deriva de la teoria de $D$-mòduls.

**Definició 2.1.** Denotem amb $R_f[s] \cdot f^s$ el mòdul lliure generat pel símbol $f^s$ sobre la localització $R_f[s] := R[f^{-1}, s]$. La regla de la cadena,

$$\partial_i \cdot \left( \frac{g}{f^k} \cdot f^s \right) = \partial_i \cdot \left( \frac{g}{f^k} \right) \cdot f^s + \frac{sg}{f^{k+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot f^s, \tag{2.1}$$

per a cada $g(x, s) \in R[s]$, indueix una estructura de $D[s]$-mòdul per l'esquerra en $R_f[s] \cdot f^s$.

A continuació definim l'*anul·lador paramètric* de $f$

$$\mathrm{Ann}_{D[s]}(f^s) = \{P(s) \in D[s] \mid P(s) \cdot f^s = 0\}, \tag{2.2}$$

i per

$$\mathcal{M}_f(s) = D[s]/\mathrm{Ann}_{D[s]}(f^s), \tag{2.3}$$

el $D[s]$-mòdul cíclic generat per $1 \cdot f^s \in R_f[s] \cdot f^s$.

L'equació funcional de Bernstein-Sato introduïda per Bernstein [Ber72] implica l'existència d'un operador diferencial $P(s) \in D[s]$ i d'un polinomi no nul $b_{f,P}(s) \in \mathbb{C}[s]$ tal que

$$P(s) \cdot f^{s+1} = b_{f,P}(s) f^s. \tag{2.4}$$

En altres paraules, existeix un element de la forma $P(s) \cdot f - b_{f,P}(s) \in \mathrm{Ann}_{D[s]}(f^s)$. Qualsevol d'aquests operadors diferencials $P(s) \in D[s]$ queda determinat, llevat d'un element de $\mathrm{Ann}_{D[s]}(f^s)$. Atès que els polinomis $b_{f,P}(s)$ que satisfan l'equació (2.4) per a algun operador diferencial $P(s)$ formen un ideal de l'anell $\mathbb{C}[s]$, això permet definir:

**Definició 2.2.** El generador mònic de l'ideal de $\mathbb{C}[s]$ generat per tots els $b_{f,P}(s)$ que satisfan l'equació (2.4) és el *polinomi de Bernstein-Sato* $b_f(s)$ de $f$.

Denotem amb $\rho_f \subset \mathbb{C}$ el conjunt de les arrels de $b_f(s)$. Com que $s = -1$ és sempre una arrel de $b_f(s)$, habitualment també es defineix el *polinomi de Bernstein-Sato reduït* com a $\tilde{b}_f(s) := b_f(s)/(s+1)$.

Una manera equivalent de definir el polinomi de Bernstein-Sato $b_f(s)$ és com el polinomi mínim de l'acció de $s$ en el $\mathbb{C}[s]$-mòdul $\mathcal{M}(s)/\mathcal{M}(s+1)$. El polinomi de Bernstein-Sato $b_f(s)$ del polinomi $f$ va ser descobert independentment per Sato [SS90] en el context de la teoria d'espais vectorials prehomogenis.

**Remarca 2.3.** Tot el que s'ha esmentat prèviament continua sent essencialment cert si $f$ és una sèrie de potències holomorfa de l'anell $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$. La demostració de l'existència del polinomi de Bernstein-Sato en aquest cas es deu a Björk [Bjo74] i Kashiwara [Kas76]. En aquest context, habitualment se l'anomena *polinomi de Bernstein-Sato local* en contrast amb el prèviament definit *polinomi de Bernstein-Sato global* $b_f(s)$ i es denota amb $b_{f,\mathbf{0}}(s)$ o $b_{f,\boldsymbol{p}}(s), p \in X$. De manera similar, denotem amb $\tilde{b}_{f,\mathbf{0}}(s)$ el polinomi de Bernstein-Sato local reduït.

La relació entre el polinomi global $b_f(s)$ i el local $b_{f,p}(s)$ és la següent [MNM91]:

$$b_f(s) = \operatorname{lcm}_{p\in \operatorname{Var}(f)} b_{f,p}(s). \tag{2.5}$$

És a dir, el polinomi de Bernstein-Sato global és el mínim comú múltiple de tots els polinomis de Bernstein-Sato locals. Calcular el polinomi de Bernstein-Sato per a un element específic $f \in R$ és, en general, molt complicat, fins i tot computacionalment. Si $f$ és llis en el punt $p \in \operatorname{Var}(f)$, es pot comprovar llavors que $b_{f,p}(s) = s + 1$. Per tant, fent servir l'equació (2.5) hom té $b_f(s) = s+1$ per a tota hipersuperfície llisa definida per $f \in R$. L'enunciat recíproc també és cert (vegeu [BM96]).

Fórmules explícites per al polinomi de Bernstein-Sato són rares de trobar. Un tipus de singularitats on sí que és possible és el cas d'un encreuament normal,

$$f = \prod_i x_i^{a_i}, \quad P(s) = \prod_i \partial_i^{a_i}, \quad \text{i} \quad b_f(s) = \prod_i \prod_{j=1}^{a_i} (s + j/a_j). \tag{2.6}$$

Donada aquesta fórmula i fent servir l'equació (2.5), calcular el polinomi de Bernstein-Sato per al cas $n = 1$ esdevé trivial. Un altre exemple senzill seria

$$f = \sum_{i=1}^m x_i^2, \quad P(s) = \sum_{i=1}^m \partial_i^2, \quad \text{i} \quad b_f(s) = (s+1)\left(s + \frac{m}{2}\right). \tag{2.7}$$

El cas de polinomis quasihomogenis amb una singularitat aïllada és també fàcil de calcular (vegeu [Yan78] i [Mal75]). Altres càlculs per a exemples concrets es poden trobar a [Yan78] (vegeu també [Kat81] i [Kat82]).

Les arrels del polinomi de Bernstein-Sato $b_f(s)$ són nombres racionals negatius, és a dir, $\rho_f \subset \mathbb{Q}_{<0}$ (vegeu els treballs de Malgrange [Mal75], per al cas d'una singularitat aïllada, i de Kashiwara [Kas76], per al cas general).

## 3. La fibra de Milnor i la monodromia

Sigui $f : (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de funció holomorfa. Per a $0 < \delta \ll \epsilon \ll 1$, sigui $B_\epsilon \subset \mathbb{C}^{n+1}$ la bola de radi $\epsilon$ centrada a l'origen, $T \subset \mathbb{C}$ el disc de radi $\delta$ centrat en zero i $T' := T \setminus \{0\}$ el disc perforat. Abusant de la notació, denotarem també amb $f$ un representant del germen. Definim ara

$$X := B_\epsilon \cap f^{-1}(T), \quad X' := X \setminus f^{-1}(0), \quad X_t := B_\epsilon \cap f^{-1}(t), \quad t \in T. \tag{3.1}$$

La restricció $f' : X' \longrightarrow T'$ és un fibrat vectorial tal que totes les fibres $X_t$ són difeomorfes, independentment de l'elecció de $\delta, \epsilon$ o $t \in T'$(vegeu [Mil68, § 4]). Qualsevol d'aquestes fibres $X_t$, o més precisament el seu tipus de difeomorfisme, s'anomena *fibra de Milnor* de $f$. El complex de grups d'homologia $H_i(X_t, \mathbb{C})$ (i els de cohomologia $H^i(X_t, \mathbb{C})$) són espais vectorials de dimensió finita que s'anul·len més enllà de grau $n$, ja que $X_t$ té el tipus d'homotopia d'un complex cel·lular de dimensió $n$ [Mil68, teorema 5.1].

L'acció del *grup fonamental* $\pi(T', t)$ de la base de la fibració indueix un difeomorfisme $h$ a cada fibra $X_t$, que s'anomena *monodromia geomètrica*. Alternativament, aquesta mateixa acció indueix endomorfismes $h_*$, $h^*$ de $H_*(X_t, \mathbb{C})$ i $H^*(X_t, \mathbb{C})$, respectivament, anomenada *monodromia algebraica complexa* de $f$. La monodromia algebraica depèn només de la singularitat $(f^{-1}(0), \mathbf{0})$ i no de l'equació escollida. El resultat fonamental sobre l'estructura de l'endomorfisme de monodromia és l'anomenat *teorema de la monodromia*.

**Teorema 3.1** (monodromia [Gro72, Cle69, Bri70])**.** *L'operador $h_*$ és quasiunipotent, és a dir, existeixen enters $p$ i $q$ tals que $(h_*^p - \mathrm{id})^q = 0$. En altres termes, els valors propis de la monodromia són arrels de la unitat. A més a més, es pot prendre $q = n + 1$.*

Si $f$ defineix una *singularitat aïllada*, la topologia de la fibra de Milnor és bastant senzilla. En aquest cas, la fibra de Milnor té el mateix tipus d'homotopia que un *ram* de $\mu$ esferes, on $\mu$ és l'anomenat *nombre de Milnor* de la singularitat (vegeu [Mil68, teorema 6.5]). Per tant, $\widetilde{H}_i(X_t, \mathbb{C}) = 0$ per a $i \neq n$ i $\dim_{\mathbb{C}} H_n(X_t, \mathbb{C}) =: \mu$. A més a més, el nombre de Milnor coincideix amb

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\Omega^{n+1}_{X,\mathbf{0}}}{\mathrm{d}f \wedge \Omega^n_{X,\mathbf{0}}}. \tag{3.2}$$

Pel principi d'Oka-Grauert [Gra58], la *fibració de Milnor* $f' : X' \longrightarrow T'$ de la singularitat definida per $f$ determina un fibrat vectorial holomorf $f^* : H^n \longrightarrow T'$ sobre $T'$, on

$$H^n := \bigcup_{t \in T'} H^n(X_t, \mathbb{C}) \tag{3.3}$$

i on $f^*$ és la projecció natural de $H^n$ a $T'$. Similarment, hom té el fibrat vectorial dual $f_* : H_n \longrightarrow T'$. El fibrat vectorial $H^n$($H_n$, respectivament) s'anomena habitualment *fibració de Milnor* en cohomologia (homologia, respectivament). Denotarem amb $\mathcal{H}^n$($\mathcal{H}_n$, respectivament) els feixos localment lliures de seccions holomorfes dels fibrats vectorials $H^n$($H_n$, respectivament). Com que $f'$ és localment trivial, el fibrat de Milnor en cohomologia és un fibrat vectorial localment constant. Òbviament, el mateix és veritat per al cas de l'homologia. Denotem amb $\Lambda$ el conjunt de valors propis de l'operador de monodromia $h^*$. Fixat $\lambda \in \Lambda$, denotem amb $H^p_\lambda$ el conjunt de vectors de $H^p$ que són anul·lats per $(h^* - \lambda\,\mathrm{id})^{n+1}$ i denotem amb $f^*_\lambda$ la projecció natural de $H^n_\lambda$ a $T'$. Llavors, $H^n_\lambda$ és un subfibrat holomorf de $H^n$ tal que $H^n = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H^n_\lambda$.

## 4. La connexió de Gauss-Manin

Sigui $E \longrightarrow S$ un fibrat vectorial holomorf sobre una varietat complexa $S$. Denotem amb $\mathcal{F}$ el seu feix de seccions holomorfes.

**Definició 4.1.** Una *connexió* holomorfa a $E$ és una aplicació $\mathbb{C}$-lineal

$$\nabla : \mathcal{F} \longrightarrow \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} =: \Omega^1_S(\mathcal{F}), \tag{4.1}$$

que satisfà la identitat de Leibniz

$$\nabla(g\sigma) = \mathrm{d}g \otimes \sigma + g \otimes \nabla(\sigma), \tag{4.2}$$

on $g$ és una secció de $\mathcal{O}_S$ i $\sigma$ una secció de $\mathcal{F}$.

Sigui $\Theta_S := \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S, \mathcal{O}_S)$ el feix de camps vectorials de la base $S$. Una connexió defineix una *derivada covariant* al llarg d'una secció $v$ de $\Theta_S$ mitjançant $\nabla_v(\sigma) = \langle \nabla\sigma, v\rangle$, on $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és l'emparellament canònic $\Omega^1_S \times \Theta_S \to \mathcal{O}_S$. Llavors, $\nabla_v$ defineix un homomorfisme $\mathbb{C}$-lineal $\nabla_v : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ que continua satisfent la identitat de Leibniz. Quan $S$ és de dimensió 1, donar una derivada covariant és el mateix que donar una connexió i, per tant, en aquest cas, podem fer servir el terme *connexió* indistintament.

Una connexió $\nabla =: \nabla_0 : \mathcal{F} \to \Omega^1_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ pot ser estesa a un homomorfisme $\mathbb{C}$-lineal entre els feixos

$$\nabla_i : \Omega^i_S \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{F} \longrightarrow \Omega^{i+1}_S \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{F} \tag{4.3}$$

mitjançant la igualtat

$$\nabla_i(\omega \otimes \sigma) = \mathrm{d}\omega \otimes \sigma + (-1)^i \omega \wedge \nabla_{i-1}(\sigma), \qquad \omega \in \Omega^i_S, \quad \sigma \in \mathcal{F}, \tag{4.4}$$

on $\omega$ és una secció de $\Omega^i_S$ i $\sigma$ és una secció de $\mathcal{F}$. Aquí $\omega \wedge \nabla_{i-1}(\sigma)$ representa la imatge de la secció $\omega \otimes \nabla_{i-1}(\sigma)$ de $\mathcal{F} \otimes (\otimes_1^{i-1}\Omega_S)$ per l'aplicació natural

$$\mathcal{F} \otimes (\otimes_1^{i-1}\Omega_S) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes (\wedge_1^{i-1}\Omega_S) = \mathcal{F} \otimes \Omega^{i-1}_S. \tag{4.5}$$

L'homomorfisme $\mathbb{C}$-lineal $R = \nabla_1 \circ \nabla_0 : \mathcal{F} \to \Omega^2_S(\mathcal{F})$ s'anomena *curvatura* de la connexió. Una connexió és *integrable* o *plana* si $R = 0$, equació equivalent a la identitat $\nabla_{[X,Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y]$, per a tot parell $X, Y$ de seccions de $\Theta_S$. A partir d'aquí assumirem que totes les connexions són llises.

Una secció local $\sigma$ de $\mathcal{F}$ és *plana* o *horitzontal* si $\nabla(\sigma) = 0$. La integrabilitat d'una connexió $\nabla$ implica la integrabilitat de l'equació diferencial $\nabla(\sigma) = 0$ associada, per a qualsevol condició inicial $\sigma(s) = v_0 \in E_s, s \in S$. El teorema de Cauchy sobre l'existència de solucions d'equacions diferencials implica l'existència d'una base de seccions locals planes. Per tant, el nucli d'una connexió $\mathrm{Ker}\,\nabla$ defineix un *feix localment constant* de $\mathbb{C}$-espais vectorials sobre $S$. Un feix localment constant de $\mathbb{C}$-espais vectorials de dimensió $r$ s'anomena habitualment *sistema local* de rang $r$.

Sigui ara $e_1, \dots, e_n$ una base local del fibrat vectorial $E \longrightarrow T$ de dimensió $n$. Sempre és possible definir localment una connexió mitjançant $\nabla(e_i) = 0$ per a tot $i = 1, \dots, n$. Si el fibrat vectorial és localment constant, aquesta definició s'estén a una connexió global. En efecte, si $\{U_i\}_{i\in I}$ i $g_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(E)$ és una trivialització de $E$, $\nabla(e_k) = \nabla(\sum_l g_{i,j} e_l) = \sum_l \mathrm{d}g_{i,j} e_l = 0$, ja que les funcions de transició són constants. Un fibrat vectorial localment constant s'anomena habitualment *fibrat vectorial pla.*

**Teorema 4.2** ([Del70, teorema 2.17])**.** *Existeix una equivalència de categories entre sistemes locals i fibrats vectorials plans.*

Ja hem vist que una implicació s'obté considerant el nucli de la connexió. Per a l'altra implicació, si $\mathcal{L}$ és un sistema local, la connexió $\nabla$ en el feix localment constant $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T$ està donada simplement per $\nabla(\sigma \cdot g) = \sigma \cdot \mathrm{d}(g)$. Notem que, si $\mathcal{L} = \underline{\mathbb{C}}_T$ és simplement el feix constant, llavors $\mathcal{F} = \mathcal{O}_T$ i la connexió coincideix amb la derivada exterior.

**Definició 4.3.** La *connexió de Gauss-Manin* en (co)homologia és la connexió integrable donada per

$$\nabla_p : \mathcal{H}_p \longrightarrow \Omega^1_{T'} \otimes_{\mathcal{O}_{T'}} \mathcal{H}_p, \qquad \nabla^p : \mathcal{H}^p \longrightarrow \Omega^1_{T'} \otimes_{\mathcal{O}_{T'}} \mathcal{H}^p, \tag{4.6}$$

a la fibració de Milnor en (co)homologia.

En aquest treball estarem principalment interessats en la versió cohomològica de la connexió de Gauss-Manin en el cas que $f : (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ defineixi una singularitat aïllada. Per tant, com a conseqüència de la secció 3, només ens interessaran els grups de cohomologia i homologia de dimensió $n$. Designarem per $\mathcal{L}^*_\lambda = \operatorname{Ker} \nabla^n_\lambda$ el sistema local generat per les seccions de $\mathcal{L}^*$ que són anul·lades per l'endomorfisme $(h^* - \lambda \operatorname{id})^{n+1}$.

## 5. Formes diferencials relatives

El complex de feixos de *formes diferencials relatives* del morfisme $f : X \longrightarrow T$ és

$$\Omega^\bullet_{X/T} : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{d}_r} \Omega^1_{X/T} \xrightarrow{\mathrm{d}_r} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_r} \Omega^n_{X/T} \xrightarrow{\mathrm{d}_r} \Omega^{n+1}_{X/T} \longrightarrow 0, \tag{5.1}$$

on $\Omega^p_{X/T} := \Omega^p_X / f^*\Omega^1_T \wedge \Omega^{p-1}_X = \Omega^p_X / \mathrm{d}f \wedge \Omega^{p-1}_X$, i $\mathrm{d}_r$ és el morfisme diferencial induït al quocient. El complex de diferencials relatives $(\Omega^\bullet_{X/T}, \mathrm{d}_r)$ és un complex de $\mathcal{O}_X$-mòduls. A més a més, $\Omega^p_{X/T}$ és un $\mathcal{O}_T$-mòdul via l'acció $g \cdot \overline{\omega} \mapsto f^*(g)\overline{\omega}$, on $g$ és secció de $\mathcal{O}_T$, i $\overline{\omega}$ una secció de $\Omega^p_{X/T}$. Es pot comprovar que $\mathrm{d}_r$ és $\mathcal{O}_T$-lineal.

La *cohomologia de De Rham relativa* respecte del morfisme $f : X \longrightarrow T$ és

$$\mathcal{H}^p(X/T) := \mathbb{R}^p f_* \Omega^\bullet_{X/T}. \tag{5.2}$$

Si el morfisme $f$ és llis es pot demostrar que $\mathcal{H}^p(X/T)$ coincideix amb $R^p f_* \underline{\mathbb{C}}_X \otimes_{\underline{\mathbb{C}}_T} \mathcal{O}_T$ (vegeu, per exemple, [Kul98, § 3.3.1]). Això vol dir que $\mathcal{H}^p(X/T)$ és una extensió natural a tot $T$ del feix $\mathcal{H}^p$ sobre $T'$ introduït a la secció 3, és a dir, $\mathcal{H}^p(X/T)\big|_{T'} = \mathcal{H}^p(X'/T') \cong \mathcal{H}^p$. A més a més, en el nostre context, $f$ és un morfisme Stein i, en conseqüència, la primera seqüència espectral per a la hipercohomologia de l'equació (5.2) degenera, cosa que implica

$$\mathcal{H}^p(X/T) = \mathcal{H}^p(f_* \Omega^\bullet_{X/T}). \tag{5.3}$$

**Teorema 5.1** ([Bri70, teorema 1.5])**.** *Si $f$ és una singularitat aïllada, els feixos $\mathcal{H}^p(X/T)$ són feixos coherents.*

L'isomorfisme entre $\mathcal{H}^p(X'/T')$ i $\mathcal{H}^p$ indueix una connexió a $\mathcal{H}^p(X/T)\big|_{T'}$ que seguirem anomenant *connexió de Gauss-Manin*. Un dels resultats fonamentals de Brieskorn a [Bri70] és una descripció algebraica de la connexió de Gauss-Manin a $\mathcal{H}^p(X/T)\big|_{T'}$, la qual s'estén naturalment a tota la base $T$.

La manera d'obtenir la *connexió de Gauss-Manin algebraica* a $\mathcal{H}^p(X/T)$ és la següent: com que tenim una descripció de l'estil de De Rham del fibrat de cohomologies $\mathcal{H}^p$, les classes de cohomologia poden ser integrades. La integral d'una forma diferencial relativa $[\omega] \in \Gamma(X, \Omega^p_{X/T})$ al llarg d'un cicle $\gamma$ de $\mathcal{H}_p$

$$I(\tilde{t}) := \int_{\gamma(\tilde{t})} \omega, \qquad \tilde{t} \in \widetilde{T}', \tag{5.4}$$

dona lloc a un emparellament no degenerat $\mathcal{H}^p(X'/T') \times \mathcal{H}_p \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{T}'}$, on $\mathcal{O}_{\widetilde{T}'}$ denota el feix de formes holomorfes a la coberta universal $\widetilde{T}'$ de $T'$. L'acció de la monodromia $h_*$ a $\mathcal{H}_p$ implica que $I(t)$ és, en general, una funció holomorfa multivaluada a $T'$. Aquest emparellament correspon, sobre oberts simplement connexos de $T'$, a l'emparellament no degenerat $\mathcal{H}^p \otimes \mathcal{H}_p \longrightarrow \mathcal{O}_{T'}$.

A continuació, les integrals $I(t)$ de l'equació (5.4) seran interpretades com a funcions holomorfes $I(t)$ a $T'$ definides en un sector arbitrari amb centre a l'origen $\mathbf{0} \in T$. Demostrarem ara que $I(t)$ és una funció holomorfa de $t$ en qualsevol d'aquests sectors. Per a això, necessitarem el teorema del residu de Leray.

**Teorema 5.2** (residu de Leray [Ler59, p. 28]). *Sigui $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^p)$ i $\gamma(t) \in H(X_t, \mathbb{C})$, llavors*

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\delta\gamma(t)} \frac{\mathrm{d}f \wedge \omega}{f - t}, \tag{5.5}$$

*on $\delta : H_p(X_t, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{p+1}(X \setminus X_t, \mathbb{C})$ és l'operador covora de Leray.*

La fórmula de l'equació (5.5) s'anomena *teorema del residu de Leray*, ja que $\omega\big|_{X_t}$ és el residu de Poincaré de $(\mathrm{d}f \wedge \omega)/(f - t)$.

**Proposició 5.3** ([Bri70]). *Sigui $[\omega] \in \Gamma(X, \mathcal{H}^p(X/T))$ i sigui $\gamma(t)$ una secció localment constant de $\mathcal{H}^p$. Llavors,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} \eta, \tag{5.6}$$

*on $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \eta$, ja que $\mathrm{d}_r([\omega]) = 0$. En particular, la funció $I(t)$ de l'equació (5.4) és una funció holomorfa en qualsevol sector obert centrat a l'origen.*

A causa de la proposició 5.3, l'expressió de la derivada covariant de la connexió de Gauss-Manin a $\mathcal{H}^p(X/T)$ ve donada per $\partial_t([\omega]) = [\eta]$. En altres termes, $\nabla([\omega]) = \mathrm{d}t \otimes [\eta]$, on $\eta$ és tal que $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \eta$. Queda per veure que aquesta expressió determina una connexió ben definida a $\mathcal{H}^p(X/T)$, és a dir, que $\eta$ representa una classe de cohomologia a $\mathcal{H}^p(X/T)$. A aquests efectes, considerem $(\Omega^\bullet, \mathrm{d}f)$ el *complex de Koszhul* de $f$,

$$(\Omega^\bullet, \mathrm{d}f) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\wedge \mathrm{d}f} \Omega_X^1 \xrightarrow{\wedge \mathrm{d}f} \cdots \xrightarrow{\wedge \mathrm{d}f} \Omega_X^n \xrightarrow{\wedge \mathrm{d}f} \Omega_X^{n+1} \longrightarrow 0. \tag{5.7}$$

Denotem amb $\mathcal{K}^p(f) := \operatorname{Ker}(\Omega_X^p \xrightarrow{\wedge \mathrm{d}f} \Omega_X^{p+1}) / \operatorname{Im}(\Omega_X^{p-1} \xrightarrow{\wedge \mathrm{d}f} \Omega_X^p)$ els feixos de cohomologia del complex $(\Omega_X^\bullet, \mathrm{d}f)$. És clar que en els punts $p \notin \operatorname{Sing}(f)$ el complex és exacte, és a dir, $\mathrm{d}f \wedge \omega = 0$ implica que $\omega = \mathrm{d}f \wedge \eta$. D'altra banda, si $\operatorname{Sing}(f) = \{\mathbf{0}\}$, és a dir, $f$ és una singularitat aïllada, el lema següent de De Rham implica l'exactitud del complex per a $p < n$.

**Lema 5.4** ([dR54]). *Sigui $R$ un anell commutatiu noetherià. Si $g = (g_1, \ldots, g_m) \in R^m$ és una seqüència regular de $R$, llavors el complex de Koszul de $g$,*

$$K^\bullet(g) : 0 \longrightarrow R \longrightarrow R^m \xrightarrow{\wedge g} \Lambda^2 R^m \xrightarrow{\wedge g} \cdots \xrightarrow{\wedge g} \Lambda^m R^m \longrightarrow 0, \tag{5.8}$$

*té grups de cohomologia*

$$H^p(K^\bullet(g)) = \begin{cases} 0, & p < m, \\ R/(g_1, \ldots, g_m), & p = m. \end{cases} \tag{5.9}$$

*És a dir, donat $\omega \in \Lambda^p R^m$, existeix $\eta \in \Lambda^{p-1} R^m$ tal que $\omega = g \wedge \eta$ si i només si $g \wedge \omega = 0$.*

En efecte, com que $f$ té una singularitat aïllada a l'origen, les derivades parcials de $f$ a $\mathbf{0}$ formen una seqüència regular de l'anell $\mathcal{O}_{X,\mathbf{0}}$. Això implica que, per a $p < n$, la connexió de Gauss-Manin de $\mathcal{H}^p(X/T)$ és

$$\nabla_f : \mathcal{H}^p(X/T) \longrightarrow \Omega^1_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{H}^p(X/T), \qquad \text{amb} \qquad \nabla_f([\omega]) = [\eta], \tag{5.10}$$

on $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \eta$. Com que $0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = -\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\eta$ implica que $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}f \wedge \zeta$, $[\eta]$ és un cocicle de $\mathcal{H}^p(X/T)$.

De manera més general, en el cas $p = n$, o si $f$ no defineix una singularitat aïllada, s'obté el que s'anomena *connexió de parella*, la definició de la qual quedarà clara després del següent cas particular. Hom té el següent morfisme $\mathbb{C}$-lineal que satisfà la identitat de Leibniz i que continuarem denotant amb $\nabla_f$ i anomenant *connexió de Gauss-Manin*,

$$\nabla_f : \mathcal{H}^p(X/T) \longrightarrow \Omega^1_T \otimes_{\mathcal{O}_T} {}'\mathcal{H}^p, \tag{5.11}$$

on

$${}'\mathcal{H}^p := \operatorname{Coker} \mathrm{d}_r = f_*\Omega^{p+1}_{X/T} \big/ \operatorname{Im}(\Omega^p_{X/T} \xrightarrow{\mathrm{d}_r} \Omega^{p+1}_{X/T}). \tag{5.12}$$

Per al cas d'una singularitat aïllada i $p = n$, Brieskorn [Bri70] va considerar un feix lleugerament més gran i més natural que presentem a continuació. El lema 5.4 implica l'existència de la següent seqüència exacta curta:

$$0 \longrightarrow \Omega^n_{X/T} \xrightarrow{\mathrm{d}f\wedge} \Omega^{n+1}_X \longrightarrow \Omega^{n+1}_{X/T}. \longrightarrow 0. \tag{5.13}$$

Prenent el quocient pels subfeixos $\mathrm{d}_r\Omega^{n-1}_{X/T}$ i aplicant $f_*$, s'obté la seqüència exacta curta

$$0 \longrightarrow {}'\mathcal{H}^n \xrightarrow{\mathrm{d}f\wedge} {}''\mathcal{H}^n \longrightarrow f_*\Omega^{n+1}_{X/T} \longrightarrow 0, \tag{5.14}$$

on

$${}''\mathcal{H}^n := f_*\Omega^{n+1}_X / \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}(f_*\Omega^{n-1}_X). \tag{5.15}$$

A conseqüència de l'equació (5.10), tenim també una connexió $\nabla_f : \mathrm{d}f \wedge {}'\mathcal{H}^n \longrightarrow {}''\mathcal{H}^n$, que és simplement $[\omega] \mapsto [\mathrm{d}\omega]$. La identificació d'aquest nou feix, definit a l'equació (5.15), amb $\mathcal{H}^n$ sobre $T'$, es realitza de la manera següent. Sigui $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n+1}_X)$ que representa una secció de ${}''\mathcal{H}^n$. Com que $\mathrm{d}f \wedge \omega = 0$, podem escriure $\omega = \mathrm{d}f \wedge \eta$, per a un cert $\eta \in \Gamma(X, \Omega^n_X)$, localment al voltant dels punts $X_t, t \neq 0$. La restricció de qualsevol d'aquestes $\eta$ a la fibra $X_t$ no depèn de la $\eta$ escollida. D'aquesta manera, obtenim una forma diferencial de $\Omega^n_{X'/S'}$, que normalment es denota amb $\omega/\mathrm{d}f$ i s'anomena *forma de Gel'fand-Leray* de $\omega$.

## 6. El reticle de Brieskorn

Sigui $k := \mathcal{O}_{T,0}[t^{-1}]$ el cos de gèrmens de funcions meromorfes a l'origen de $T$. Sigui $V$ un espai vectorial de dimensió finita sobre $k$.

**Definició 6.1.** Una *connexió meromorfa* $\nabla$ a $V$ és una aplicació $\mathbb{C}$-lineal $\nabla : V \longrightarrow \Omega^1_{T,0} \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} V$ que satisfà la identitat de Leibniz, $\nabla(gv) = \mathrm{d}g \otimes v + g \otimes \nabla v$.

Si $\nabla$ és una connexió en un $\mathcal{O}_{T,\mathbf{0}}$-mòdul $E$, s'estén de manera natural a una connexió $\overline{\nabla}$ al $k$-espai vectorial $E \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k$ a través de la fórmula

$$\overline{\nabla}(s \otimes t^{-k}) = \nabla(s) \otimes t^{-k} - s \otimes kt^{-k-1}, \qquad s \in E. \tag{6.1}$$

De manera similar, si $\nabla : E \longrightarrow \Omega^1_{T,0} \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} F$ és una connexió d'una parella de $\mathcal{O}_{T,0}$-mòduls $E \subset F$ tal que $F/E$ és de torsió, és a dir, $\dim_{\mathbb{C}} F/E < \infty$, llavors la connexió $\overline{\nabla}$ defineix una connexió meromorfa a $V = E \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k = F \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k$. Denotarem sempre amb $\partial_t := \nabla_{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}$ la derivada covariant associada a la connexió.

**Definició 6.2.** Un *reticle* d'un $k$-espai vectorial $V$ és un $\mathcal{O}_{T,0}$-submòdul $L$ finitament generat de $V$ tal que $V = L \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k$. L'*ordre del pol* d'una connexió meromorfa $\nabla$ en un reticle $L$ és el mínim $p \in \mathbb{Z}$ tal que $t^p \partial_t L \subseteq L$.

Com que $V = L \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k$, $L$ és lliure de torsió. Llavors, com que $L$ és un mòdul finitament generat sense torsió sobre un anell d'ideals principals, $L$ és lliure de rang $\dim_k V$. A més a més, qualsevol parell de reticles $L$ i $L'$ de $V$ està relacionat per $t^p L \subset L'$, per a algun $p \in \mathbb{Z}$.

Una classe molt rellevant de connexions meromorfes és aquella que té *singularitats regulars*. Hi ha diferents definicions equivalents de la noció de singularitats regulars d'una connexió. Per exemple, en termes de la velocitat de creixement de les solucions o bé usant la matriu de l'equació diferencial associada (vegeu, per exemple, [CL55, § 4]). Nosaltres utilitzarem la definició algebraica següent:

**Definició 6.3.** Un reticle $L$ d'un $k$-espai vectorial $V$ s'anomena *saturat* si aquest és estable per l'acció de l'operador $t\partial_t$, això vol dir $t\partial_t L \subseteq L$. Una connexió meromorfa $\nabla : V \longrightarrow \Omega^1_{T,0} \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} V$ s'anomena *regular* si existeix un reticle de $V$ saturat.

Si $L$ és un reticle de $V$ i $\nabla$ és una connexió meromorfa regular a $V$, un reticle estable es pot construir a partir de $L$ mitjançant el procés de *saturació*. Concretament, $\widetilde{L} := \sum_{p=0}^{\infty} (t\partial_t)^p L$ és un reticle saturat per $\nabla$ a $V$.

La discussió anterior es tradueix de la manera següent per al cas de la connexió de Gauss-Manin d'una singularitat aïllada. Abans necessitarem el resultat de Brieskorn següent, que és conseqüència del fet que la fibra de Milnor és contràctil.

**Proposició 6.4** ([Bri70, proposició 1.6])**.** *Si $f$ té una singularitat aïllada a l'origen, hom té que $\mathcal{H}^p(X/T)_0 \cong H^p(\Omega^\bullet_{X/T,\mathbf{0}})$ com a $\mathcal{O}_{T,0}$-mòduls.*

Definim $H^n := H^n(\Omega^\bullet_{X/T,\mathbf{0}})$. De manera similar,

$$\begin{aligned} {}'H^n &:= ({}'\mathcal{H}^n)_0 = \Omega^n_{X,\mathbf{0}}/(\mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}_{X,\mathbf{0}} + \mathrm{d}\Omega^{n-1}_{X,\mathbf{0}}), \\ {}''H^n &:= ({}''\mathcal{H}^n)_0 = \Omega^{n+1}_{X,\mathbf{0}}/(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\Omega^{n-1}_{X,\mathbf{0}}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

El $\mathcal{O}_{T,0}$-mòdul ${}''H^n$ s'anomena habitualment *reticle de Brieskorn*, nomenclatura que justificarem tot seguit. Notem que

$$ {}'H^n/H^n = \Omega^{n+1}_X/\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\Omega^{n-1}_X = {}''H^n/\mathrm{d}f \wedge {}'H^n \tag{6.3}$$

són $\mathbb{C}$-espais vectorials de dimensió finita igual a $\mu$.

**Proposició 6.5** ([Seb70], [Bri70])**.** *Els $\mathcal{O}_{T,0}$-mòduls $H^n, {}'H^n$ i ${}''H^n$ són lliures de rang $\mu$, on $\mu$ és el nombre de Milnor de $f$.*

La demostració que els mòduls anteriors són lliures és deguda a Sebastiani [Seb70] (vegeu també [Mal74, teorema 5.1]). El resultat per a $H^n$ se segueix de l'isomorfisme de la proposició 6.4, el resultat sobre la coherència esmentat al teorema 5.1, l'isomorfisme

$\mathcal{H}^n(X'/T') \cong \mathcal{H}^n$ i el resultat de Milnor discutit a la secció 3. Per als altres dos mòduls, el resultat es dedueix de les discussions prèvies i l'equació (6.3).

Tots tres $\mathcal{O}_{T,0}$-mòduls de la proposició 6.5 són reticles del $k$-espai vectorial $V = H^n \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k = {}'H^n \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k = {}''H^n \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} k$, on la connexió de Gauss-Manin $\nabla_{f,0}$ entre les fibres a l'origen d'ambdues parelles defineix una connexió meromorfa $\overline{\nabla}_{f,0}$ a $V$. Aquesta connexió es coneix habitualment com a *connexió de Gauss-Manin meromorfa.* A més a més, com que són reticles de $V$, es tenen les inclusions contràries

$$t^{\kappa_f}\, {}''H^n \subset \mathrm{d}f \wedge {}'H^n \qquad \text{i} \qquad t^{\kappa_f}\, {}'H^n \subset H^n, \tag{6.4}$$

on $\kappa_f \in \mathbb{Z}$ és el menor enter tal que $f^{\kappa_f} \in J_0(f)$. En efecte, per a aquest enter hom té $f^{\kappa_f}\mathrm{d}\underline{x} = \mathrm{d}f \wedge \xi$ per a certs $\xi \in \Omega^n_{X,\mathbf{0}}$. Llavors, per a qualsevol $\omega \in \Omega^n_{X,\mathbf{0}}$

$$\mathrm{d}(f^{\kappa_f}\omega) = \kappa_f f^{\kappa_f - 1}\mathrm{d}f \wedge \omega + f^{\kappa_f}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \big(\kappa_f f^{\kappa_f-1}\omega + \alpha\xi\big), \tag{6.5}$$

on $\mathrm{d}\omega = \alpha \mathrm{d}\underline{x}, \alpha \in \mathcal{O}_{X,\mathbf{0}}$. De manera similar, per a $g \in \mathcal{O}_{X,\mathbf{0}}$, $f^{\kappa_f} g\mathrm{d}\underline{x} = \mathrm{d}f \wedge g\xi$. Això dona lloc a l'aplicació següent, ben definida,

$$t^{\kappa_f}\nabla_{f,0} : {}''H^n \longrightarrow \Omega^1_{T,0} \otimes_{\mathcal{O}_{T,0}} {}''H^n, \tag{6.6}$$

donada per

$$t^{\kappa_f}\nabla_{f,0}([g\mathrm{d}\underline{x}]) = \mathrm{d}t \otimes \left[\mathrm{d}(g\xi) - \kappa_f f^{\kappa_f-1} g\mathrm{d}\underline{x}\right]. \tag{6.7}$$

Aquesta aplicació mostra que la connexió de Gauss-Manin té un pol d'ordre $\kappa_f$ respecte al reticle de Brieskorn ${}''H^n$. L'expressió anterior per a $t^{\kappa_f}\nabla_{f,0}$ permet calcular de manera explícita la matriu de la connexió de $\nabla_{f,0}$ fins a un cert ordre en $t$ desitjat. En aquest context, un dels resultats més importants de Brieskorn [Bri70] és el següent:

**Teorema 6.6** ([Bri70, teorema 2])**.** *La connexió de Gauss-Manin $\nabla_{f,0}$ d'una singularitat aïllada és una connexió meromorfa amb singularitat regular.*

Donat el teorema 6.6, hom pot considerar la saturació del reticle de Brieskorn ${}''H^n$ respecte a la connexió de Gauss-Manin $\nabla_{f,0}$. És a dir,

$${}''\widetilde{H}^n = \sum_{p=0}^{\infty} (t\partial_t)^p({}''H^n), \tag{6.8}$$

on $\partial_t$ és la derivada covariant de la connexió de Gauss-Manin $\nabla_{f,0}$. Amb aquests objectes sobre la taula, podem enunciar el resultat clàssic de Malgrange següent:

**Teorema 6.7** ([Mal75])**.** *Si $f : (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ és una singularitat aïllada, el polinomi de Bernstein-Sato reduït $\tilde{b}_{f,\mathbf{0}}(s)$ de $f$ és igual al polinomi mínim de l'endomorfisme*

$$-\overline{\partial_t t} : {}''\widetilde{H}^n / t\, {}''\widetilde{H}^n \longrightarrow {}''\widetilde{H}^n / t\, {}''\widetilde{H}^n\,, \tag{6.9}$$

*entre $\mathbb{C}$-espais vectorials de dimensió $\mu$, el nombre de Milnor de $f$.*

El reticle saturat és estable respecte a l'acció de $t\partial_t$, però recordem que $\partial_t t - t\partial_t = 1$. Els corol·laris següents són també resultats clàssics de Malgrange.

**Corol·lari 6.8** ([Mal75])**.** *Si $\alpha$ és una arrel de $\tilde{b}_{f,\mathbf{0}}(s)$, llavors $\exp(-2\pi\imath\alpha)$ és un valor propi de la monodromia de $f$ a l'origen.*

El resultat anàleg per al cas de singularitats no aïllades és també degut a Malgrange [Mal83]. El resultat següent que ja s'ha esmentat a la secció 2 és una conseqüència del corol·lari anterior i el teorema 3.1.

**Corol·lari 6.9** ([Mal75]). *Les arrels de $b_{f,\mathbf{0}}(s)$ són nombres racionals negatius.*

Com s'ha mencionat anteriorment a la secció 2, aquest resultat és cert també per a singularitats arbitràries (vegeu [Kas76]). Acabarem aquesta secció amb la definició següent:

**Definició 6.10.** Les arrels del polinomi característic de l'endomorfisme $\overline{\partial_t t}$ de (6.9) al teorema 6.7 s'anomenen *b-exponents* d'una singularitat aïllada.

## 7. La conjectura de Yano

Sigui $f : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de funció holomorfa que defineix una corba plana irreductible amb seqüència característica $(n, \beta_1, \dots, \beta_g)$, on $n$ és la multiplicitat algebraica de $f$ a l'origen i $g \geq 1$ és el nombre d'exponents característics. Fent servir les mateixes notacions que a [Yan82, § 2], definim:

$$\begin{aligned}
& r_i := \frac{\beta_i + n}{e_i}, \quad R_i := \frac{\beta_i e_{i-1} + \beta_{i-1}(e_{i-2} - e_{i-1}) + \cdots + \beta_1(e_0 - e_1)}{e_i}, \\
& r'_0 := 2, \quad r'_i := r_{i-1} + \left\lfloor \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{e_{i-1}} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{r_i e_i}{e_{i-1}} \right\rfloor + 1, \qquad (7.1)\\
& R'_0 := n, \quad R'_i := R_{i-1} + \beta_i - \beta_{i-1} = \frac{R_i e_i}{e_{i-1}},
\end{aligned}$$

on els enters $e_i, i = 0, \dots, g$ es defineixen com a $e_i := \gcd(e_{i-1}, \beta_i), e_0 := n$. Inspirat per la fórmula d'A'Campo pels valors propis de la monodromia d'una singularitat aïllada, Yano va definir el polinomi següent de potències fraccionàries en $t$:

$$R\big((n, \beta_1, \dots, \beta_g), t\big) := \sum_{i=1}^{g} t^{\frac{r_i}{R_i}} \frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{R_i}}} - \sum_{i=0}^{g} t^{\frac{r'_i}{R'_i}} \frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{R'_i}}} + t, \qquad (7.2)$$

i va demostrar que $R\big((n, \beta_1, \dots, \beta_n), t\big)$ té coeficients positius. Finalment,

**Conjectura** (Yano [Yan82]). *Per a corbes genèriques en una certa deformació $\mu$-constant d'una corba plana irreductible amb seqüència característica $(n, \beta_1, \dots, \beta_g)$, els b-exponents $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu\}$ són donats per la funció generadora $R$. És a dir,*

$$\sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i} = R\big((n, \beta_1, \dots, \beta_g), t\big). \qquad (7.3)$$

Remarquem que, en el cas de corbes planes, una deformació a $\mu$-constant és el mateix que una deformació topològicament trivial.

La conjectura de Yano va ser demostrada per al cas d'un sol exponent característic, és a dir, $g = 1$, per Cassou-Noguès [CN88]. Més recentment, Artal Bartolo, Cassou-Noguès, Luengo i Melle-Hernández [ACNLM17] varen demostrar el cas de dos exponents característics sota la hipòtesi que els valors propis de la monodromia siguin diferents dos a dos. Aquesta hipòtesi sobre els valors propis de la monodromia implica que el polinomi mínim i el polinomi característic de l'endomorfisme de (6.9) al teorema 6.7 coincideixen.

Això vol dir que les arrels del polinomi de Bernstein-Sato i els $b$-exponents coincideixen en aquest cas.

## 8. Períodes integrals

Sigui $\eta \in \Gamma(X, \Omega_X^n)$ una $n$-forma holomorfa a $X$ i sigui $\gamma(t), t \in T'$ una secció localment constant de la fibració $H_n = \cup_{t \in T'} H_n(X_t, \mathbb{C})$. Com que la restricció de $\eta$ a $X_t$ és una forma holomorfa de grau màxim i, per tant, és tancada, la integral

$$I(t) := \int_{\gamma(t)} \eta, \tag{8.1}$$

ja presentada a la secció 5, de $\eta$ al llarg del cicle $\gamma(t)$, està ben definida. A més a més, per l'acció de la monodromia, $\gamma(t)$ és una funció multivaluada de $t$ que pren valors a $H_n(X_t, \mathbb{C})$ i $I(t)$ defineix una funció multivaluada a $T'$. Com a conseqüència del teorema del residu de Leray de la secció 5, $I(t)$ és una funció holomorfa (i multivaluada), ja que

$$I'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\gamma(t)} \eta = \int_{\gamma(t)} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}f}, \tag{8.2}$$

on $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}f$ és la forma de Gel'fand-Leray de $\mathrm{d}\eta$, que ja hem introduït a la secció 5. Aquesta forma denota la restricció a $X_t$ de qualsevol forma holomorfa $\xi$ tal que $\xi \wedge \mathrm{d}f = \mathrm{d}\eta$. En coordenades locals, si $\mathrm{d}\eta = g\, \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, llavors, en el conjunt $\{x \in X \mid \partial f/\partial x_i \neq 0\}$, $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}f$ es defineix per la restricció a $X_t$ de la forma diferencial

$$(-1)^i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^{-1} g\, \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n. \tag{8.3}$$

Sigui ara $\gamma(t)$ un cicle evanescent, és a dir, una secció localment constant de $H_n$ tal que $\gamma(t) \to 0$ si $t \to 0$. Malgrange [Mal74, lema 4.5] demostra que, si $\gamma(t)$ és un d'aquests cicles, $I(t) \to 0$ si $t \to 0$ en qualsevol sector $|\arg t| \leq C, C \in \mathbb{R}_+$. A més a més, demostra que $\gamma(t)$ és un vector propi de l'endomorfisme de monodromia $h_n$ a $H_n(X_t, \mathbb{C})$, és a dir, $(h_n - \lambda\, \mathrm{id})^p \gamma(t) = 0$ amb $p$ mínim i $\lambda \in \mathbb{C}^*$ una arrel de la unitat. Llavors, com que la connexió de Gauss-Manin és regular, hom té que $I(t)$ té la expansió següent (vegeu [Mal74, equació 4.7.1]):

$$I(t) = \int_{\gamma(t)} \eta = \sum_{\substack{\alpha \in L(\lambda) \\ 0 \leq q < p}} a_{\alpha,q} t^\alpha (\ln t)^q, \quad a_{\alpha,q} \in \mathbb{C}, \tag{8.4}$$

on $L(\lambda)$ és el conjunt de $\alpha > 0$ tal que $\lambda = \exp(-2\pi\imath\alpha)$. Notem que, si $\gamma(t)$ no és un cicle evanescent, llavors necessàriament $\lambda = 1$, ja que $I(t)$ té la mateixa expressió que l'equació (8.4), llevat d'un terme constant diferent de zero.

Com que per a qualsevol forma diferencial $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^{n+1})$ existeix $\eta \in \Gamma(X, \Omega_X^n)$ tal que $\omega = \mathrm{d}\eta$, considerem només les integrals de $\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}f$ al llarg de cicles evanescents $\gamma(t) \in H_n(X_t, \mathbb{C})$. Llavors, gràcies al teorema de la monodromia,

$$\int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{\mathrm{d}f} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\alpha \in L(\lambda)} \sum_{0 \leq k \leq n} a_{\alpha-1,k} t^{\alpha-1} (\ln t)^k. \tag{8.5}$$

## 9. Seccions geomètriques

Per a tota forma diferencial de grau màxim i qualsevol $t \in T'$, la forma $\omega/\mathrm{d}f$ a $X_t$ defineix un element de $H^n(X_t, \mathbb{C})$. En conseqüència, tota forma $\omega$ defineix una secció $s[\omega]$ del fibrat $H^n$. En efecte, per la construcció anterior, si $\gamma(t)$ és una secció localment constant de la fibració $H_n$, l'emparellament $\langle s[\omega], \gamma\rangle$ donat a l'equació (8.5) és holomorf i, per tant, $s[\omega]$ és una secció holomorfa del fibrat $H^n$, és a dir, un element de $\mathcal{H}^n$. Seguint la terminologia de Varchenko [Var80, § 4], aquestes seccions són anomenades *seccions geomètriques*.

Donada $w$ una secció local de $\mathcal{H}^n$ i $\gamma$ una secció local de $H_n$, tenim que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle w, \gamma\rangle = \langle \partial_t^* w, \gamma\rangle$, ja que les seccions horitzontals generen $\mathcal{H}^n$ com a feix de $\mathcal{O}_{T'}$-mòduls. Consegüentment, per l'equació (8.2), la connexió de Gauss-Manin $\partial_t^*$ a $\mathcal{H}^n$ aplicada a les seccions geomètriques es calcula com a $\partial_t^* s[\omega] = s[\mathrm{d}(\omega/\mathrm{d}f)]$.

Els nombres complexos $a_{\alpha,k}$ que apareixen a l'equació (8.5) depenen de $\omega$ i de $\gamma(t)$. Per a un $\omega$ fixat, $a_{\alpha,k}$ és una funció lineal en l'espai de seccions localment constants de $H_n$. Com a conseqüència, el nombre complex $a_{\alpha,k}$ defineix una secció localment constant $A^{\omega}_{\alpha,k}(t)$ de la fibració $H^n$ mitjançant la regla $\langle A^{\omega}_{\alpha,k}(t), \gamma(t)\rangle := a_{\alpha,k}(\omega, \gamma)$. Per construcció, les seccions geomètriques $s[\omega]$ són:

$$s[\omega] := \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{\alpha\in L(\lambda)} \sum_{0\le k\le n} t^{\alpha-1}(\ln t)^k A^{\omega}_{\alpha-1,k}(t). \tag{9.1}$$

Les seccions $A^{\omega}_{\alpha,k}(t)$ seran anomenades *seccions geomètriques localment constants.* Sigui $S_\alpha$ el feix de totes les seccions localment constants del fibrat $H^n$ generat per les seccions $A^{\omega}_{\alpha,k}$ amb $\alpha \in \mathbb{Q}$ fixat, i on $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n+1}_X)$, $k = 0, \dots, n$. Com que $A^{\omega}_{\alpha,k} = A^{f\omega}_{\alpha+1,k}$, hom té que $S_\alpha \subseteq S_{\alpha+1}$ i $\mathcal{L}^* = \bigoplus_\alpha S_\alpha$.

Seguint [Var80, § 4], per a tot $\alpha \in \cup_{\lambda\in\Lambda} L(\lambda)$ es defineix el subfibrat holomorf $f^*_{\lambda,\alpha} : H^n_{\lambda,\alpha} \longrightarrow T'$, on $H^n_\lambda$ està generat sobre $\mathcal{O}_{T'}$ per les seccions de $S_\alpha$.

## 10. Seccions elementals

Sigui $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n+1}_X)$, $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in L(\lambda)$ i assumim que, com a mínim, una de les seccions $A^{\omega}_{\alpha,0}, \dots, A^{\omega}_{\alpha,n}$ és diferent de zero. Sigui $p = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid A^{\omega}_{\alpha,k} \neq 0\}$.

L'acció natural de la monodromia $h_*$ en els fibrats d'homologia $H_n$ es trasllada en una acció natural de $(h^*)^{-1}$ en les seccions $A^{\omega}_{\alpha,k}$ a través de la integral de l'equació (8.5). És a dir, Varchenko demostra a [Var80, lema 5] que

$$(h^*)^{-1} A^{\omega}_{\alpha,k} = \lambda^{-1} \sum_{j=k}^{p} \frac{(2\pi\imath)^{j-k}}{(j-k)!} A^{\omega}_{\alpha,j}. \tag{10.1}$$

Per tant, les seccions $A^{\omega}_{\alpha,0}, \dots, A^{\omega}_{\alpha,p}$ són al subfeix localment constant $\mathcal{L}^*_\lambda$ de $\mathcal{L}^*$ que és invariant per $h^*$ i $A^{\omega}_{\alpha,0}$ és una secció cíclica d'aquest subfeix. Per l'equació (10.1), en comptes de l'operador $h^* - \lambda\,\mathrm{id}$, considerarem l'operador $(h^*)^{-1}\lambda - \mathrm{id}$ a $\mathcal{L}^*_\lambda$. Notem que $((h^*)^{-1}\lambda - \mathrm{id})^{n+1} = 0$ a $\mathcal{L}^*_\lambda$. Definim ara l'operador $\ln((h^*)^{-1}\lambda)$ a $\mathcal{L}^*_\lambda$ per la fórmula

$$\ln((h^*)^{-1}\lambda) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} ((h^*)^{-1}\lambda - \mathrm{id})^j \tag{10.2}$$

com a [Var80, lema 5]. De l'equació (10.1) es dedueix que

$$A^{\omega}_{\alpha,k} = \left(\frac{\ln\left((h^*)^{-1}\lambda\right)}{2\pi\imath}\right)^k A^{\omega}_{\alpha,0}, \tag{10.3}$$

i, per tant,

$$t^{\alpha}\sum_{k=0}^{p}(\ln t)^k A^{\omega}_{\alpha,k}(t) = \exp\left[\ln t\left(\alpha\,\mathrm{id} + \frac{\ln\left((h^*)^{-1}\lambda\right)}{2\pi\imath}\right)\right] A^{\omega}_{\alpha,0}(t). \tag{10.4}$$

Llavors, Varchenko [Var80] defineix la *secció elemental* associada a una secció localment constant $A \in \mathcal{L}^*_{\lambda}$ i $\alpha \in L(\lambda)$ com la secció $s_{\alpha}[A]$ de $\mathcal{H}_{\lambda} := \mathcal{L}^*_{\lambda} \otimes_{\mathbb{C}_{T'}} \mathcal{O}_{T'}$ definida per

$$s_{\alpha}[A](t) := \exp\left[\ln t\left(\alpha\,\mathrm{id} + \frac{\ln\left((h^*)^{-1}\lambda\right)}{2\pi\imath}\right)\right] A(t). \tag{10.5}$$

A continuació presentarem la relació, donada per Varchenko a [Var80, § 8], entre les seccions elementals i la saturació del reticle de Brieskorn que apareix al teorema 6.7.

Considerem els fibrats vectorials quocients $H^n_{\lambda,\alpha}/H^n_{\lambda,\alpha-1}$ a $T'$, els quals denotarem amb $F_{\alpha}$. Sigui $\mathcal{F}_{\alpha}$ el feix localment lliure generat per les seccions de $F_{\alpha}$. Denotarem amb $\mathcal{G}_{\alpha}$ el subfeix de $\mathcal{F}_{\alpha}$ generat per les imatges de les seccions elementals $s_{\alpha}[A]$, amb $A$ una secció de $S_{\alpha}$, per la projecció

$$\pi_{\alpha} : H^n_{\lambda,\alpha} \longrightarrow H^n_{\lambda,\alpha}/H^n_{\lambda,\alpha-1} = F_{\alpha}. \tag{10.6}$$

La restricció de la connexió $\nabla^*_{\lambda}$ de $H^n_{\lambda}$ a $H^n_{\lambda,\alpha}$ indueix una connexió $\nabla^*_{\lambda,\alpha}$ en el fibrat quocient $F_{\alpha}$. Per tant, com que el feix $\mathcal{G}_{\alpha}$ és anul·lat per la connexió $\nabla^*_{\lambda,\alpha}$, $\mathcal{G}_{\alpha}$ és un sistema local que coincideix amb $\operatorname{Ker}\nabla^*_{\lambda,\alpha}$. A més a més, l'operador $\partial_t^* t$ envia seccions elementals a seccions elementals i, per tant, indueix un endomorfisme $D_{\alpha}$ a $\mathcal{G}_{\alpha}$, el qual té valor propi igual a $\alpha$ a totes les fibres.

**Teorema 10.1** ([Var80, teorema 13])**.** *Sigui $\mathcal{G}_{\alpha}, \alpha \in L(\lambda), \lambda \in \Lambda$ el feix localment constant definit anteriorment i considerem el sistema local $\mathcal{G} := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{\alpha\in L(\lambda)}\mathcal{G}_{\alpha}$ amb l'endomorfisme $D := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\bigoplus_{\alpha\in L(\lambda)} D_{\alpha}$. Llavors, existeix un isomorfisme natural entre els espais vectorials complexos $(j_*\mathcal{G})_0$ i $\widetilde{H}''_{f,\mathbf{0}}/t\widetilde{H}''_{f,\mathbf{0}}$ i, sota aquest isomorfisme, l'endormorfisme $\partial_t t$ de $\widetilde{H}''_{f,\mathbf{0}}/t\widetilde{H}''_{f,\mathbf{0}}$ correspon a $D_0$.*

El conjunt de $b$-exponents d'una singularitat aïllada està llavors contingut dins del conjunt de nombres racionals positius de la forma $\alpha \in L(\lambda), \lambda \in \Lambda$.

## 11. Resolució de singularitats i reducció semiestable

Sigui $\pi : \overline{X} \longrightarrow X$ una resolució de les singularitats de $f$. Això vol dir que $\pi$ és un morfisme biracional propi i $X$ és una varietat llisa tal que els divisors

$$F_{\pi} := \mathrm{Div}(\pi^* f) = \sum_{i\in I} N_i E_i, \qquad K_{\pi} := \mathrm{Div}(\mathrm{Jac}(\pi)) = \sum_{i\in J} k_i E_i$$

tenen suport amb encreuaments normals simples, és a dir, que localment són un producte de monomis. Denotem amb $E = \sum_{i\in J} E_i$ el divisor excepcional del morfisme $\pi$. L'existència de resolucions de singularitats sobre cossos de característica positiva es deu a Hironaka [Hir64*a*, Hir64*b*].

Per raons que quedaran clares més endavant, és convenient passar de la varietat de resolució $\overline{X}$ a un altre espai on els encreuaments normals del divisor excepcional $E$ són preservats, però de tal manera que $F_\pi$ sigui reduït. Això és en efecte possible si relaxem les condicions de suavitat de $\overline{X}$. Aquest procés s'anomena *reducció semiestable* i referim el lector a [Ste77, § 2] per a detalls concrets.

Sigui $e$ un enter positiu de tal manera que la $e$-èsima potència de la monodromia és unipotent. Per la descripció d'A'Campo de la monodromia en termes de la resolució de $f$ donada a [A'C75], podem prendre $e = \operatorname{lcm}(N_1, N_2, \dots, N_r)$. Definim

$$\widetilde{T} := \{\tilde{t} \in \mathbb{C} \mid |\tilde{t}| < \delta^{1/e}\} \tag{11.1}$$

i sigui $\sigma : \widetilde{T} \longrightarrow T$ l'aplicació donada per $\sigma(\tilde{t}) = \tilde{t}^e$. Denotem amb $\widetilde{X}$ la normalització del producte fibrat $\overline{X} \times_T \widetilde{T}$ i amb $n : \widetilde{X} \longrightarrow \overline{X} \times_T \widetilde{T}$ el morfisme de normalització. Siguin $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow \overline{X}$ i $\tilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{T}$ les aplicacions naturals. Finalment, denotem $\widetilde{X}_t := \tilde{f}^{-1}(t)$ i $\widetilde{D} := \rho^*(D)$ per a qualsevol divisor de $D$. Tenim, doncs, el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\rho} & \overline{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^* f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \widetilde{T} & \xrightarrow{\sigma} & T & = & T. \end{array} \tag{11.2}$$

Una *orbivarietat* de dimensió $n+1$ és un espai analític complex que admet un recobriment per oberts $\{U_i\}$ tal que cada $U_i$ és analíticament isomorf a $Z_i/G_i$, on $Z_i \subset \mathbb{C}^{n+1}$ és una bola oberta i $G_i$ és un subgrup finit de $GL(n+1, \mathbb{C})$. De manera similar, un divisor $D$ en una orbivarietat $\widetilde{X}$ és un *divisor amb encreuaments normals d'orbivarietat* si, localment, $(\widetilde{X}, \widetilde{D}) = (Z, F)/G$, on $Z \subset \mathbb{C}^{n+1}$ és un domini obert, $G \subset GL(n+1, \mathbb{C})$ és un subgrup petit que actua a $Z$ i $F \subset Z$ és un divisor $G$-invariant amb encreuaments normals. Les singularitats d'una orbivarietat tenen com a màxim codimensió dos.

**Lema 11.1** ([Ste77, lema 2.2])**.** *$\widetilde{X}$ és una orbivarietat i el divisor de $(\pi\rho)^* f$ és un divisor reduït amb encreuaments normals d'orbivarietat.*

En coordenades locals de $\overline{X}$, l'orbivarietat $\widetilde{X}$ té la presentació següent: fixem $U$ una carta afí de $\overline{X}$ amb coordenades $x_0, \dots, x_n$ per les quals hi ha enters positius $k$ i $N_0, \dots, N_k$ tals que $(\pi^* f)(x_0, \dots, x_n) = x_0^{N_0} \cdots x_k^{N_k}$. Llavors, en un entorn obert $U \times \widetilde{T}$ de $\overline{X} \times \widetilde{T}$, tenim $x_0^{N_0} \cdots x_k^{N_k} = \tilde{t}^e$. Sigui $d := \gcd(N_0, \dots, N_k)$; llavors, la preimatge de $U \times \widetilde{T}$ a $\widetilde{X}$ consisteix en $d$ oberts disjunts que denotarem amb $U_1, U_2, \dots, U_d$. En un d'aquests oberts $U_j$, es tenen coordenades $y_0, \dots, y_k, \tau$ relacionades per $\tau = y_0 \cdots y_k$. L'aplicació $\rho\big|_{U_j} : U_j \longrightarrow U \times_T \widetilde{T}$ ve donada per $\tilde{t} = \tau \exp(2\pi\imath j/d)$, $x_i = y_i^{e/N_i}$ si $0 \le i \le k$ i $x_i = y_i$ si $i > k$.

Sigui $G = \mathbb{Z}/(e/N_0) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(e/N_k)$ el grup que actua sobre $\mathbb{C}\{y_0, \dots, y_k\}$ mitjançant

$$(a_0, \dots, a_k) \cdot y_i = \begin{cases} \exp(2\pi\imath a_j N_j/e) \cdot y_j & \text{si } 0 \le j \le k, \\ y_j & \text{si } j > k. \end{cases} \tag{11.3}$$

Sigui $G' := \{g \in G \mid g\tau = \tau\} \subset GL(n+1, \mathbb{C})$. Llavors, les funcions holomorfes i les formes diferencials a $U_j$ són les habituals en termes de les coordenades $y_0, \dots, y_n$ subjectes a la condició de ser invariant per l'acció de $G'$, és a dir, $g \cdot (y_0 \cdots y_k) = y_0 \cdots y_k$. En aquest context, el càlcul diferencial és completament anàleg a l'habitual en una varietat llisa.

Considerem $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^{n+1})$ una forma diferencial de grau màxim. Sigui $v_i(\omega)$ l'ordre d'anul·lació de $\pi^*\omega$ en la component excepcional $E_i$, llavors l'ordre d'anul·lació $\tilde{v}_i(\omega)$ de $(\pi\rho)^*\omega$ a $\widetilde{E}_i$ és $e(v_i(\omega)+1)/N_i - 1$. Clarament, $v_i(\omega) = k_i$ si $\omega = \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ i, per tant, $\tilde{v}_i(\omega) = e(k_i+1)/N_i - 1$. Sigui ara $\widetilde{\omega}$ una secció de $\Omega_{\widetilde{X}}^{n+1}$. Com que, localment, $\tilde{f}(y_0, \ldots, y_n) = y_0 \cdots y_k$, la forma diferencial relativa $\widetilde{\omega}/\mathrm{d}\tilde{f}$ està ben definida a

$$\widetilde{E}^\circ := \bigcup_{i=1}^{r} \widetilde{E}_i^\circ \quad \text{on} \quad \widetilde{E}_i^\circ := \widetilde{E}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} (\widetilde{E}_i \cap \widetilde{E}_j). \tag{11.4}$$

El lema següent és fàcil de demostrar:

**Lema 11.2** ([Var82, lema 4.3]). *Si $\pi\rho$ també denota la restricció a $\widetilde{X}_t, \tilde{t} \in \widetilde{T}^*$ de l'aplicació $\pi\rho : \widetilde{X} \longrightarrow X$, llavors, per a tot $\tilde{t} \in \widetilde{T}^*$,*

$$\left.\frac{(\pi\rho)^*(\omega)}{\mathrm{d}\tilde{f}}\right|_{\widetilde{X}_{\tilde{t}}} = e\tilde{f}^{e-1}(\pi\rho)^*\left(\left.\frac{\omega}{\mathrm{d}f}\right|_{X_{\tilde{t}^e}}\right). \tag{11.5}$$

## 12. Expansió asimptòtica completa

Sigui $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^{n+1})$ una forma diferencial holomorfa de grau màxim a $X$. Considerem $E_i^\circ \times T \subset \overline{X}$ coordenades analítiques tals que $\bar{f} = x_0^{N_i} = t$. Expressant $\varpi := \pi^*\omega$ en aquestes coordenades fixades, podem considerar la descomposició de $\varpi$ següent:

$$\varpi = \varpi_0 + \varpi_1 + \cdots + \varpi_\nu + \cdots, \tag{12.1}$$

on $\varpi_\nu$ és una forma holomorfa d'ordre $v_i(\omega) + \nu$ en la variable $x_0$. Anomenarem $\varpi_\nu$ la $\nu$-èsima peça de $\omega$ associada al divisor $E_i$. Per alleugerir la notació, ometrem la dependència de l'índex $i$, ja que sempre treballarem amb un divisor excepcional $E_i$ fixat.

Sigui $\widetilde{X}_i^\circ := n^{-1}(E_i^\circ \times \widetilde{T}) \subset \widetilde{X}$, on $n$ és el morfisme de normalització de la secció anterior. Recordem que a $\widetilde{X}_i^\circ$ existeixen coordenades locals tals que $\tilde{f}(y_0, \ldots, y_n) = y_0 = \tilde{t}$ amb $\widetilde{E}_i^\circ : y_0 = 0$. Recordem també que, si $\widetilde{\omega}_\nu = \rho^*\varpi_\nu$, llavors els ordres d'anul·lació tenen la relació següent: com que $v_i(\varpi_\nu) = v_i(\omega) + \nu$, llavors $\tilde{v}_i(\widetilde{\omega}_\nu) = e(v_i(\omega) + 1 + \nu)/N_i - 1$. Amb aquestes consideracions, es pot demostrar el lema següent fent servir càlculs en coordenades locals.

**Lema 12.1.** *Sigui $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ un $n$-cicle qualsevol. Llavors,*

$$\int_{\tilde{\gamma}(\tilde{t})} \frac{\widetilde{\omega}}{\mathrm{d}\tilde{f}} = \sum_{\nu \geq 0} \tilde{t}^{\tilde{v}_i(\widetilde{\omega}_\nu)} \int_{\tilde{\gamma}(\tilde{t})} R_i(\widetilde{\omega}_\nu), \tag{12.2}$$

*on $R_i(\widetilde{\omega}_\nu) := \tilde{f}^{-\tilde{v}_i(\widetilde{\omega}_\nu)}\widetilde{\omega}_\nu/\mathrm{d}\tilde{f}$ és una $n$-forma holomorfa definida a $\widetilde{E}_i^\circ$.*

Notem que, com que $\varpi_0$ és sempre diferent de zero, $R_i(\widetilde{\omega}_0)$ és també una $n$-forma diferent de zero a $\widetilde{E}_i^\circ$. En canvi, això no té per què ser cert per als altres termes $R_i(\widetilde{\omega}_\nu), \nu > 0$.

Podem obtenir ara l'expressió de l'equació (8.5) en termes de les dades numèriques de la resolució enviant cap a $X$ les expressions de l'equació (12.2). És a dir, gràcies al lema 11.2, el terme de l'esquerra de l'equació (12.2) queda com a

$$\int_{\tilde\gamma(\tilde t)} \frac{(\pi\rho)^*\omega}{\mathrm{d}\tilde f} = e\tilde t^{e-1}\int_{\tilde\gamma(\tilde t)} (\pi\rho)^*\Big(\frac{\omega}{\mathrm{d}f}\Big). \tag{12.3}$$

Definim ara els nombres

$$\sigma_{i,\nu}(\omega) := \frac{v_i(\omega)+1+\nu}{N_i}, \qquad \nu\in\mathbb{Z}_+. \tag{12.4}$$

En particular, $\sigma_{i,\nu}(\mathrm{d}x_0\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n) = (k_i+1+\nu)/N_i$. Llavors,

$$\int_{\tilde\gamma(\tilde t)} (\pi\rho)^*\Big(\frac{\omega}{\mathrm{d}f}\Big) = e^{-1}\sum_{\nu\geq 0}\tilde t^{e(\sigma_{i,\nu}(\omega)-1)}\int_{\tilde\gamma(\tilde t)} R_i(\widetilde\omega_\nu), \tag{12.5}$$

ja que $\tilde v_i(\widetilde\omega_\nu)-e+1 = e(\sigma_{i,\nu}(\omega)-1)$. Finalment, com que $\tilde t^e = t$, obtenim el lema següent:

**Lema 12.2.** *Per a qualsevol $n$-cicle $\tilde\gamma(\tilde t)$ a $\widetilde X_i^\circ$, sigui $\gamma(t) := \rho_*\tilde\gamma(\tilde t^e)$, llavors*

$$\int_{\pi_*\gamma(t)} \frac{\omega}{\mathrm{d}f} = \sum_{\nu\geq 0} t^{\sigma_{i,\nu}(\omega)-1}\int_{\gamma(\tilde t)} R_{i,\nu}(\omega), \tag{12.6}$$

*on $R_{i,\nu}(\omega) := e^{-1}(\rho^{-1})^*R_i(\widetilde\omega_\nu)$ és una $n$-forma diferencial multivaluada a $E_i^\circ$ que no depèn de l'enter $e$.*

Els termes logarítmics que falten a l'equació (12.6) quan la comparem amb l'equació (8.5) estan amagats en les integrals de la part dreta de l'equació (12.6). En efecte, aquestes integrals poden tendir a l'infinit quan $\tilde t$ tendeix a zero. Això voldria dir que, a causa de l'equació (8.5), hi ha un terme logarítmic associat a l'exponent $\sigma_{i,\nu}(\omega)-1$.

Com a conseqüència, almenys per a aquells termes tals que, quan $t$ tendeix a zero, la integral de $R_{i,\nu}(\omega)$ al llarg d'algun cicle $\gamma(\tilde t)$ està ben definida, la $n$-forma diferencial multivaluada $R_{i,\nu}(\omega)$ a $E_i$ defineix una classe de cohomologia localment constant $A^\omega_{\sigma_{i,\nu}-1,0}(t)$ del fibrat vectorial generat a cada fibra per $\pi_*\gamma(t)$, $t\in T'$. En efecte, hom té l'emparellament

$$\langle A^\omega_{\sigma_{i,\nu}-1,0}(t), \pi_*\gamma(t)\rangle := \lim_{\tilde t\to 0}\int_{\gamma(\tilde t)} R_{i,\nu}(\omega)\in\mathbb{C}. \tag{12.7}$$

Tant aquí com a continuació denotarem $A^\omega_{\sigma_{i,\nu}-1,0}$ en lloc de $A^\omega_{\sigma_{i,\nu}(\omega)-1,0}$ per alleugerir la notació.

Sigui $D_{i,j}$ la intersecció de $E_i$ amb un altre component irreductible $D_j\in\operatorname{Supp}(F_\pi)$. Tenim llavors que $D_{i,j}$ són divisors de la varietat $E_i$, ja que $F_\pi$ té encreuaments normals simples. Per definició, $E_i^\circ = E_i\setminus\cup_j D_{i,j}$.

**Lema 12.3.** *La $n$-forma diferencial $R_{i,\nu}(\omega)$ a $E_i^\circ$ és multivaluada al llarg dels divisors $D_{i,j}$ amb ordre d'anul·lació igual a*

$$\varepsilon_{j,\nu}(\omega) := -N_j\sigma_{i,\nu}(\omega) + v_j(\overline\omega_\nu) = -N_j\frac{v_i(\omega)+1+\nu}{N_i} + v_j(\overline\omega_\nu). \tag{12.8}$$

Com que no hi haurà confusió, no farem explícita la dependència de l'índex $i$ del divisor $E_i$ quan ens referim als nombres $\varepsilon_{j,\nu}(\omega)$.

Donada $\omega\in\Gamma(X,\Omega_X^{n+1})$, per poder demostrar que un candidat $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ és un $b$-exponent de $f$, s'han de comprovar diverses coses. Primer, la $\nu$-èsima peça $\overline\omega_\nu$ de $\omega$ associada al divisor excepcional $E_i$ ha de ser diferent de zero. A continuació, s'ha de demostrar que existeix un cicle $\gamma(\tilde{t})$ tal que la integral de $R_{i,\nu}(\omega)$ al llarg de $\gamma(\tilde{t})$ és diferent de zero quan $\tilde{t}$ tendeix a zero. Gràcies a la secció 9, això dona una secció localment constant $A^{\omega}_{\sigma_{i,\nu}-1,0}$. Finalment, pel teorema 10.1, perquè $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ sigui un $b$-exponent n'hi ha prou que $A^{\omega}_{\sigma_{i,\nu}-1,0} \notin S_{\sigma_{i,\nu}-2}$, ja que llavors la imatge de $s_{\sigma_{i,\nu}-1}[A^{\omega}_{\sigma_{i,\nu}-1,0}]$ a $\mathcal{G}_{\sigma_{i,\nu}-1} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_{i,\nu}-1}$ serà diferent de zero.

## 13. Períodes integrals per singularitats de corbes planes

Sigui $f : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de funció holomorfa que defineix una singularitat de corba plana, no necessàriament irreductible. Utilitzant les notacions introduïdes a la secció 11, fixarem un resolució de singularitats $\pi : \overline{X} \longrightarrow X$ de $f$. Notem que el divisor excepcional de qualsevol d'aquestes resolucions de singularitats està format exclusivament per corbes racionals, és a dir, $E_i \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Fixem una component excepcional $E_i$ de la resolució de $f$. Assumim també que tenim una 2-forma diferencial holomorfa $\omega \in \Gamma(X, \Omega^2_X)$ tal que la peça de grau $\nu$, $\overline{\omega}_\nu$, de $\omega$ associada amb la component excepcional $E_i$ és diferent de zero. L'argument següent per trobar cicles $C$ sobre divisors excepcionals de *ruptura* tal que per un cert candidat a exponent $\sigma_{i,\nu} - 1$ hom té

$$\lim_{\tilde{t}\to 0} \int_{\gamma(\tilde{t})} R_{i,\nu}(\omega) = m \int_C R_{i,\nu}(\omega) \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{13.1}$$

és degut a Loeser [Loe88, § III.3]. Recordem que els divisors excepcionals de ruptura són aquells tals que $\chi(E_i^\circ) < 0$. Llavors, com s'ha comentat anteriorment a la secció 12, això implicarà que la forma multivaluada $R_{i,\nu}(\omega)$ definida a $E_i$ determina una secció localment constant $A^{\omega}_{\sigma_{i,\nu}-1,0}$ diferent de zero.

En el cas de corbes planes, els divisors $D_{i,j}$ de la varietat $E_i$ són simplement punts, els quals denotarem amb $p_j$, sense especificar explícitament la seva dependència de $E_i$. Sigui ara

$$S_{i,\nu}(\omega) := \{p_j \in E_i \mid p_j = E_i \cap D_j \text{ amb } D_j \in \operatorname{Supp}(F_\pi) \text{ i } \varepsilon_{j,\nu}(\omega) \neq 0\}, \tag{13.2}$$

i sigui $L$ el sistema local a $E_i \setminus S_{i,\nu}(\omega)$ amb monodromies $e^{-2\pi\imath\varepsilon_{j,\nu}(\omega)}$ al voltant dels punts $p_j \in S_{i,\nu}(\omega)$. La forma $R_{i,\nu}(\omega)$, per $\nu > 0$, pot no ser diferent de zero a $E_i^\circ$. Denotem, per tant, $q_k \in E_i^\circ, k = 1, \ldots, r$ els punts on $R_{i,\nu}(\omega)$ té zeros d'ordre $\delta_{k,\nu}(\omega) > 0$. Llavors, la forma multivaluada $R_{i,\nu}(\omega)$ defineix un element de $\Gamma(E_i, \Omega^1(-\sum \varepsilon_{j,\nu}(\omega)p_j - \sum \delta_{k,\nu}(\omega)q_k)(L))$. En aquest context, tenim el resultat següent, que és una petita generalització d'un resultat semblant degut a Deligne i Mostow [DM86, proposició 2.14].

**Proposició 13.1.** *Sigui $\omega \in \Gamma(\mathbb{P}, \Omega^1(-\sum \varepsilon_{j,\nu}(\omega)p_j - \sum \delta_{k,\nu}(\omega)q_k)(L))$. Assumim que $\sum \varepsilon_{j,\nu} \leq r - 1$ i que $e^{-2\pi\imath\varepsilon_{j,\nu}(\omega)} \neq 1$ per a tot $p_j \in S_{i,\nu}(\omega)$. Llavors, $R_{i,\nu}(\omega)$ defineix una classe de cohomologia diferent de zero a $H^1(\mathbb{P} \setminus S_{i,\nu}(\omega), L)$.*

El lema següent és clau a l'hora d'aplicar la proposició anterior. Altres versions d'aquest mateix resultat en el cas de $\nu = 0$ es poden trobar en treballs de Lichtin [Lic85] i Loeser [Loe88].

**Proposició 13.2.** *Per a qualsevol forma diferencial holomorfa* $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^2)$

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{j,\nu}(\omega) + \sum_{k=1}^{s} \delta_{k,\nu}(\omega) = -2 - \nu E_i^2. \tag{13.3}$$

**Corol·lari 13.3.** *Assumint que* $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^2)$ *és tal que els divisors de* $\mathrm{Supp}(\mathrm{Div}(\pi^*\omega))$ *i de* $\mathrm{Supp}(F_\pi)$ *que intersequen* $E_i$ *són els mateixos, llavors:*

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{j,\nu}(\omega) \geq -2. \tag{13.4}$$

Assumint que $\omega$ satisfà el corol·lari 13.3, si $E_i$ és de ruptura, és a dir, $\chi(E_i^\circ) = 2 - r < 0$, i suposant que el candidat $\sigma_{i,\nu}(\omega) - 1$ és tal que $\varepsilon_{j,\nu}(\omega) \notin \mathbb{Z}$, llavors la proposició 13.1 pot ser aplicada i la forma multivaluada $R_{i,\nu}(\omega)$ defineix una classe de cohomologia diferent de zero a $H^1(E_i^\circ, L)$. La conseqüència d'això és que, com que l'emparellament entre homologia i cohomologia és no degenerat, existeix un cicle torçat $C \in H_1(E_i^\circ, L^\vee)$ tal que

$$\int_C R_{i,\nu}(\omega) \neq 0. \tag{13.5}$$

Seguint la mateixa construcció que a [Loe88], sigui $p : F \longrightarrow E_i^\circ$ la coberta finita associada al sistema local $L$ de $E_i^\circ$. Aquesta coberta finita es caracteritza pel fet que $p_*\underline{\mathbb{C}}_F = L$. Per definició, el cicle torçat $C \in H_1(E_i^\circ, L^\vee)$ s'identifica amb un cicle de $H_1(F, \mathbb{C})$. Recordem ara l'existència del morfisme $\rho : \widetilde{X} \longrightarrow \overline{X}$ de la secció 11. La restricció de $\rho$ a $\widetilde{E}_i$ és una coberta ramificada de grau $N_i$, la multiplicitat del divisor excepcional $E_i$, amb punts de ramificació $E_i \cap D_j$ i monodromies $\exp(2\pi\imath N_j/N_i)$. Per tant, com que les monodromies de $F$ són

$$\exp(2\pi\imath\varepsilon_{j,\nu}(\omega)) = \exp\left(-2\pi\imath(k_i + 1 + \nu)\frac{N_j}{N_i}\right) = \exp\left(2\pi\imath\frac{N_j}{N_i}\right)^{-(k_i+1+\nu)}, \tag{13.6}$$

la restricció de $\rho_i$ a $\rho$ factoritza com a

$$\rho_i : \widetilde{E}_i^\circ \xrightarrow{\ q\ } F_0 \xrightarrow{\ p|_{F_0}\ } E_i^\circ, \tag{13.7}$$

on $F_0$ és una de les components connexes de $F$. Ara, com que $q$ és també una coberta finita, hi ha un enter $m$ i un cicle $\tilde{\gamma}$ a $H_1(\widetilde{E}_i^\circ, \mathbb{C})$ tal que $q_*\tilde{\gamma} = mC$. Finalment, com que $\tilde{f}$ és una fibració localment trivial en un entorn de $\widetilde{E}_i^\circ$, usant entorns tubulars, podem estendre $\tilde{\gamma}$ a una família de cicles localment constants $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ de $H_1(\widetilde{X}_t, \mathbb{C})$ amb $\tilde{t} \in \widetilde{T}'$ tals que en el límit $\tilde{\gamma}(0) := \tilde{\gamma}$ (vegeu [Var82, § 4.3]).

Definint $\gamma(t) := \rho_*\tilde{\gamma}(\tilde{t}^e)$ per a tot punt $t \in T'$ a la base, hem obtingut, sota certes hipòtesis sobre l'exponent candidat $\sigma_{i,\nu}(\omega) - 1$ i el divisor excepcional $E_i$, una família de cicles localment constants de $H_1(\overline{X}_t, \mathbb{C})$ tal que se satisfà l'equació (13.1). El resultat precís s'enunciarà a la pròxima proposició.

**Definició 13.4.** Un candidat a $b$-exponent $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ es dirà que és *no ressonant* si els nombres $\varepsilon_{j,\nu}(\omega)$ definits a (12.8) pertanyen a $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Notem que la condició de no ressonància és independent de la forma $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^2)$ escollida per definir $\sigma_{i,\nu}(\omega)$. És a dir, si $\omega' \in \Gamma(X, \Omega_X^2)$ és una altra forma diferencial tal que $\sigma_{i,\nu}(\omega') = \sigma_{i,\nu}(\omega)$ i $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ és no ressonant, llavors $\sigma_{i,\nu}(\omega')$ és també no ressonant.

**Proposició 13.5.** *Sigui $\omega \in \Gamma(X, \Omega^2_X)$ una forma diferencial que satisfà el corol·lari 13.3 i tal que la $\nu$-èsima peça $\overline{\omega}_\nu$ de $\omega$ respecte del divisor de ruptura $E_i$ és diferent de zero. Assumim també que $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ és no ressonant. Llavors, la forma diferencial multivaluada $R_{i,\nu}(\omega)$ a $E_i$ defineix una secció geomètrica $A^{\omega}_{\sigma_{i,\nu}-1,0}(t)$ no zero del fibrat vectorial $H^1$.*

## 14. $B$-exponents genèrics

Sigui $f : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de funció holomorfa que defineix una corba plana irreductible amb semigrup $\Gamma = \langle \overline{\beta}_0, \ldots, \overline{\beta}_g \rangle$. Donat $E_i$ un divisor de ruptura de la resolució minimal de $f$, prenem $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ un candidat a $b$-exponent no ressonant associat a $E_i$ (vegeu la definició 13.4).

**Lema 14.1.** *Un candidat a b-exponent $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ és no ressonant si i només si $\overline{\beta}_i \sigma_{i,\nu}(\omega) \notin \mathbb{Z}$ i $e_{i-1}\sigma_{i,\nu}(\omega) \notin \mathbb{Z}$.*

Per a la resta de la secció, fixarem $\omega \in \Gamma(X, \Omega^2_X)$ una forma diferencial de grau màxim tal que $\omega = g\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ amb $g(\mathbf{0}) \neq 0$. Per simplicitat, podem agafar $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Recordem en aquest punt que és un resultat clàssic que la seqüència característica i el semigrup d'una corba plana irreductible són invariants topològics complets i, per tant, equivalents. Usant les propietats de les valoracions divisorials de les corbes planes, podem escriure el conjunt de candidats associats a aquesta $\omega$ i al divisor de ruptura $E_i$ en termes del semigrup $\Gamma$ de la forma següent:

$$\sigma_{i,\nu}(\omega) = \frac{m_i + n_1 \cdots n_i + \nu}{n_i \overline{\beta}_i}, \qquad \nu \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.1}$$

Notem, per tant, que el conjunt de candidats de la conjectura de Yano (vegeu l'equació (7.2)) és exactament

$$\bigcup_{i=1}^{g} \left\{ \sigma_{i,\nu}(\omega) = \frac{m_i + n_1 \cdots n_i + \nu}{n_i \overline{\beta}_i} \;\middle|\; 0 \leq \nu < n_i \overline{\beta}_i,\ \overline{\beta}_i \sigma_{i,\nu}(\omega), e_{i-1}\sigma_{i,\nu}(\omega) \notin \mathbb{Z} \right\}. \tag{14.2}$$

Per veure la igualtat entre els exponents de l'equació (7.2) i el conjunt (14.2) és suficient utilitzar les igualtats $R_i' = \overline{\beta}_i$ i $r_i' = \lceil (m_i + n_1 \cdots n_i)/n_i \rceil$. Per tant, $R_i = N_i = n_i \overline{\beta}_i = n_i R_i'$ i $r_i = k_i + 1 = m_i + n_1 \cdots n_i = n_i r_i'$.

Si considerem la fórmula d'A'Campo per al cas de corbes planes irreductibles, és fàcil de veure que hi ha exactament $\mu$ elements en els conjunts de (14.2), comptats amb possibles multiplicitats. Llavors, $\lambda = \exp(2\pi\imath \sigma_{i,\nu}(\omega))$ amb $i = 1, \ldots, g$ i $0 \leq \nu < n_i \overline{\beta}_i$ és el conjunt de tots els valors propis de la monodromia d'una corba plana irreductible.

**Proposició 14.2.** *Sigui $\lambda = \exp(-2\pi\imath\sigma_{i,\nu}(\omega)), 0 \leq \nu < n_i\overline{\beta}_i$ un valor propi de la monodromia. Per a qualsevol $f_y : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0), y \in I_\delta$, deformació $\mu$-constant de $f$, existeix una forma diferencial $\eta_y \in \Gamma(X, \Omega^2_X)$ tal que $A^{\eta_y}_{\sigma_{i,0}-1,0}(t, y)$ és diferent de zero per a totes les fibres de la deformació i $\exp(-2\pi\imath\sigma_{i,0}(\eta_y)) = \exp(-2\pi\imath\sigma_{i,\nu}(\omega))$.*

Un ingredient essencial en la demostració de la conjectura de Yano és la semicontinuïtat dels $b$-exponents d'una corba plana irreductible. El resultat següent generalitza un resultat de Varchenko que només s'aplica a singularitats aïllades tals que els valors propis de la monodromia són diferents dos a dos. Per a més detalls sobre la semicontinuïtat, vegeu [Bla21].

**Teorema 14.3** (semicontinuïtat). *Si $f : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ és un corba plana irreductible, els b-exponents d'una deformació a $\mu$-constant uniparamètrica de $f$ depenen de manera semicontínua superior del paràmetre de la deformació.*

Per a qualsevol $\nu \in \mathbb{Z}_+$, podem mostrar que, de manera genèrica en una deformació uniparamètrica a $\mu$-constant de $f$, la peça $\overline{\omega}_\nu$ de grau $\nu$ de $\omega$ associada amb el divisor de ruptura $E_i$ és diferent de zero i, per tant, $R_{i,\nu}(\omega)$ és diferent de zero.

**Proposició 14.4.** *Per a qualsevol $\sigma_{i,\nu}(\omega), \nu \in \mathbb{Z}_+$ no ressonant, existeix $f_y : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0), y \in I_\delta$, una deformació uniparamètrica a $\mu$-constant de $f$ tal que la secció localment constant $A^\omega_{\sigma_{i,\nu}-1,0}(t, y)$ és diferent de zero per fibres genèriques de la deformació.*

La demostració d'aquest resultat utilitza l'existència i les propietats de la corba monomial d'un semigrup de corba plana (vegeu [Tei86]). Aquesta part de la demostració de la conjectura de Yano és on s'utilitza de manera essencial la irreductibilitat de $f$. Finalment, podem mostrar que la conjectura de Yano és certa.

**Teorema 14.5** (conjectura de Yano). *Sigui $f : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen de funció holomorfa que defineix una corba plana irreductible amb semigrup $\Gamma = \langle \overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_g \rangle$. Llavors, per corbes genèriques en una certa deformació a $\mu$-constant de $f$, els b-exponents genèrics són:*

$$\bigcup_{i=1}^{g} \left\{ \sigma_{i,\nu} = \frac{m_i + n_1 \cdots n_i + \nu}{n_i \overline{\beta}_i} \;\middle|\; 0 \leq \nu < n_i \overline{\beta}_i,\ \overline{\beta}_i \sigma_{i,\nu}, e_{i-1}\sigma_{i,\nu} \notin \mathbb{Z} \right\}. \tag{14.3}$$

*Demostració.* Sigui $\sigma_{i,\nu} = \sigma_{i,\nu}(\omega)$ un candidat a $b$-exponent del conjunt de (14.3). Pel lema 14.1, $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ és no ressonant i, com a conseqüència de la proposició 14.4, tenim l'existència, de forma genèrica en una deformació a $\mu$-constant de $f$, d'una secció geomètrica localment constant $A^\omega_{\sigma_{i,\nu}-1,0}$ diferent de zero donada per l'exponent $\sigma_{i,\nu}(\omega) - 1$ associat al divisor de ruptura $E_i$. Pel teorema 10.1, i gràcies al fet que $0 \leq \nu < N_i$, hom té que $\sigma_{i,\nu}(\omega)$ és un $b$-exponent d'aquestes corbes genèriques. Això és així, ja que la projecció de $s_{\sigma_{i,\nu}(\omega)-1}[A^\omega_{\sigma_{i,\nu}-1,0}]$ en el fibrat quocient $F_{\sigma_{i,\nu}(\omega)-1}$ (vegeu la secció 10) és diferent de zero. En efecte, $A^\omega_{\sigma_{i,\nu}-1,0}$ no és un subfibrat de $H^1_{\lambda,\sigma_{i,\nu}(\omega)-2}$ perquè $\sigma_{i,\nu}(\omega) - 1, 0 \leq \nu < n_i\overline{\beta}_i$ és estrictament més petit que $\sigma_{i,0}(\omega)$.

Finalment podem utilitzar la semicontinuïtat superior del teorema 14.3, per així poder aplicar aquest mateix argument a tots els candidats a $b$-exponents de (14.3). En aquest cas, com que $\sigma_{i,\nu}(\omega) - 1, 0 \leq \nu < n_i\overline{\beta}_i$, és més petit que $\sigma_{i,0}(\omega)$ per a tot $i = 1, \ldots, g$, la semicontinuïtat superior implica que, quan un sol candidat a $b$-exponent ha estat trobat de manera genèrica, deformacions posteriors no mouran aquest $b$-exponent. D'aquesta manera obtenim una deformació a $\mu$-constant de la corba original $f$ tal que els candidats de (14.3) són els $b$-exponents de fibres genèriques de la deformació.

## Referències bibliogràfiques

[A'C75] A'Campo, N. «La fonction zêta d'une monodromie». *Comment. Math. Helv.*, 50 (1975), p. 233–248.

[ACNLM17] Artal Bartolo, E.; Cassou-Noguès, P.; Luengo, I.; Melle Hernández, A. «Yano's conjecture for 2-Puiseux pair irreducible plane curve singularities». *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 53 (1) (2017), p. 211–239.

[Ber71] Bernstein, J. «Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients». *Funct. Anal. Appl.*, 5 (2) (1971), p. 1–16.

[Ber72] BERNSTEIN, J. «The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter». *Funct. Anal. Appl.*, 6 (4) (1972), p. 26–40.

[Bjo74] BJÖRK, J.-E. «Dimensions of modules over algebras of differential operators». A: *Fonctions analytiques de plusieurs variables et analyse complexe.* París: Gauthier-Villars, 1974, p. 6–11. (Agora Mathematica; 1)

[Bla19] BLANCO, G. «Poles of the complex zeta function of a plane curve». *Adv. Math.*, 350 (9) (2019), p. 396–439.

[Bla21] BLANCO, G. «Yano's conjecture». *Invent. Math.*, 226 (2021), p. 421–465.

[BM96] BRIANÇON, J.; MAISONOBE, PH. «Caractérisation géométrique de l'existence du polynôme de Bernstein relatif». A: CAMPILLO, A.; NARVÁEZ-MACARRO, L. (ed.). *Algebraic geometry and singularities*, 1996, p. 215–236. (Progress in Mathematics; 134)

[Bri70] BRIESKORN, E. «Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen». *Manuscripta Math.*, 2 (1970), p. 103–161.

[BS05] BUDUR, N.; SAITO, M. «Multiplier ideals, $V$-filtration, and spectrum». *J. Algebraic Geom.*, 14 (2) (2005), p. 269–282.

[CL55] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations.* Nova York; Toronto; Londres: McGraw-Hill, Inc., 1995.

[Cle69] CLEMENS, C. H. «Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 136 (1969), p. 93–108.

[CN88] CASSOU-NOGUÈS, P. «Polynôme de Bernstein générique». *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 58 (1) (1988), p. 103–124.

[Del70] DELIGNE, P. *Equations différentielles à points singuliers réguliers.* Berlín: Springer, 1970. (Lecture Notes in Math.; 163)

[DM86] DELIGNE, P.; MOSTOW, G. D. «Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 63 (1986), p. 5–89.

[dR54] RHAM, G. de. «Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire». *Comment. Math. Helv.*, 28 (1954), p. 346–352.

[ELSV04] EIN, L.; LAZARSFELD, R.; SMITH, K. E.; VAROLIN, D. «Jumping coefficients of multiplier ideals». *Duke Math. J.*, 123 (3) (2004), p. 469–506.

[Gra58] GRAUERT, H. «Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen». *Math. Ann.*, 135 (1958), p. 263–273.

[Gro72] GROTHENDIECK, A. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (1967/69); SGA 7 I.* Berlín: Springer, 1972. (Lecture Notes in Math.; 288)

[Hir64*a*] HIRONAKA, H. «Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I». *Ann. of Math.*, 79 (1) (1964), p. 109–203.

[Hir64*b*] HIRONAKA, H. «Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: II». *Ann. of Math.*, 79 (2) (1964), p. 205–326.

[Kas76] KASHIWARA, M. «$B$-functions and holonomic systems». *Invent. Math.*, 38 (1) (1976), p. 33–53.

[Kat81] KATO, M. «The $b$-function of a $\mu$-constant deformation of $x^7+y^5$». *Bull. College Sci. Univ. Ryukyus*, 32 (1981), p. 5–10.

[Kat82] KATO, M. «The $b$-function of a $\mu$-constant deformation of $x^9+y^4$». *Bull. College Sci. Univ. Ryukyus*, 33 (1982), p. 5–8.

[Kul98] KULIKOV, V. S. *Mixed Hodge structures and singularities.* Cambridge: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Tracts in Math.; 132)

[Ler59] LERAY, J. «Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe». *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), p. 81–180.

[Lic85] LICHTIN, B. «Some algebro-geometric formulae for poles of $|f(x,y)|^s$». *Amer. J. Math.*, 107 (1) (1985), p. 139–162.

[Lic89] LICHTIN, B. «Poles of $|f(z,w)|^{2s}$ and roots of the $B$-function». *Ark. Mat.*, 27 (1-2) (1989), p. 283–304.

[Loe88] LOESER, F. «Fonctions d'Igusa $p$-adiques et polynômes de Bernstein». *Amer. J. Math.*, 110 (1) (1988), p. 1–21.

[Mal74] MALGRANGE, B. «Intégrales asymptotiques et monodromie». *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, sèrie 4, 7 (3) (1974), p. 405–430.

[Mal75] MALGRANGE, B. «Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée». A: CHAZARAIN, J. (ed). *Fourier integral operators and partial differential equations*. Berlín: Springer. (Lecture Notes in Math.; 459)

[Mal83] MALGRANGE, B. «Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente». *Astérisque* [París: Soc. Math. France], 101-102: *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I–II)* (1983), p. 243–267.

[Mil68] MILNOR, J. *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1968. (Ann. of Math. Stud.; 61)

[MJNB21] MONTANER, J. À.; JEFFRIES, J.; NÚÑEZ-BETANCOURT, L. «Bernstein-sato polynomials in commutative algebra». A: PEEVA, I. (ed.). *Commutative algebra: Expository papers dedicated to David Eisenbud on the occasion of his 75th birthday*. Berlín: Springer, 2021, p. 1–76.

[MNM91] MEBKHOUT, Z.; NARVÁEZ-MACARRO, L. «La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer». *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, sèrie 4, 24 (2) (1991), p. 227–256.

[Seb70] SEBASTIANI, M. «Preuve d'une conjecture de Brieskorn». *Manuscripta Math.*, 2 (1970), p. 301–308.

[SS90] SATO, M.; SHINTANI, T. «Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part) – the English translation of Sato's lecture from Shintani's note». *Nagoya Math. J.*, 120 (1990), p. 1–34.

[Ste77] STEENBRINK, J. H. M. «Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology». A: *Real and complex singularities, Oslo, 1976: Proceedings of the Nordic Summer School/NAVF Symposium in Mathematics, Oslo, Aug. 5-25, 1976*. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1977, p. 525–563.

[Tei86] TEISSIER, B. «Appendix», 1986. A: [Zar86].

[Var80] VARCHENKO, A. N. «Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial». *Bull. Sci. Math.*, 104 (2) (1980), p. 205–223.

[Var82] VARCHENKO, A. N. «Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology». *Math. USSR-Izv.*, 18 (3) (1982), p. 469–512.

[Wal15] WALTHER, U. «Survey on the $D$-modules $f^s$. With an appendix by Aton Leykin». A: *Commutative algebra and noncommutative algebraic geometry*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015, p. 391–430.

[Yan78] YANO, T. «On the theory of $b$-functions». *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 14 (1) (1978), p. 111–202.

[Yan82] YANO, T. «Exponents of singularities of plane irreducible curves». *Sci. Rep. Saitama Univ. Ser.*, 10 (2) (1982), p. 21–28.

[Zar86] ZARISKI, O. *Le problème des modules pour les branches planes*. París: Hermann, 1986.

## Arxius de les Seccions de Ciències

Títols publicats*

**1/1** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 1, núm. 1 (1 novembre 1911)
**1/2** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 1, núm. 2 (1 juliol 1912)
**1/3** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 1, núm. 3 (31 desembre 1912)
**2/1** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 2, núm. 1 (1913)
**2/2** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 2, núm. 2 (1914)
**2/3** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 2, núm. 3 (1914)
**3/1** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 3, núm. 1 (1915)
**3/2** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 3, núm. 2 (1915)
**3/3** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 3, núm. 3 (1915)
**4/1** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 1 (1916)
**4/2** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 2 (1916)
**4/3** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 3 (1916)
**4/4** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 4 (1916)
**4/5** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 5 (1916)
**4/6** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 6 (1916)
**4/7** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 7 (1916)
**4/8** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 8 (1916)
**4/9** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 4, núm. 9 (1916)
**5/1** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 5, núm. 1 (1917)
**5/2** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 5, núm. 2 (1917)
**5/3** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 5, núm. 3 (1917)
**5/4** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 5, núm. 4 (1917)
**5/5** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 5, núm. 5 (1917)
**5/6** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 5, núm. 6 (1917)
**6/1** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 6, núm. 1 (1918)
**6/2-5** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 6, núm. 2-5 (1918)
**6/6-9** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 6, núm. 6-9 (1918)
**7** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 7 (1919)
**8** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 8 (1920)
**9** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 9 (1921)
**10** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 10 (1922)
**11** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 11 (1923)
**12** *Arxius de l'Institut de Ciències*, any 12 (1924)
**13** Frederic Duran, *Histopatologia d'una nova capa d'epiteli semiescamós pla que cobreix les mucoses digestives* (1947)
**14** Eduard Fontserè, *Assaig d'un vocabulari meteorològic català* (1948)

* Els volums 1 al 12 es corresponen amb els volums (anys) de la revista *Arxius de l'Institut de Ciències*, que es deixà d'editar l'any 1924. Així mateix, els volums 28, 29, 32, 34, 36, 38 al 42, 44, 46, 47, 50, 52 i 55 es corresponen amb els números 18 al 33 de la revista *Treballs de la Societat Catalana de Biologia*, que es continua editant com a publicació periòdica independent. D'altra banda, fins al volum 99, aquesta col·lecció es denominà «Arxius de la Secció de Ciències», ja que les dues seccions de ciències actuals (la Secció de Ciències Biològiques i la Secció de Ciències i Tecnologia) eren una sola, la Secció de Ciències.

15 Pius Font i Quer, *Morfologia, nomenclatura i geografia de l'"Arenaria aggregata" (L.) Lois* (1948)
16 Enric Guiter, *Estudis sobre la hidròlisi en química mineral* (1949)
17 Ferran Sunyer i Balaguer, *Una nova generalització de les funcions gairebé-periòdiques* (1949)
18 Pius Font i Quer (dir.), *Flora catalana. Descripció de les plantes que es fan a les terres catalanes i països limítrofs*, vol. 1, '*Scabiosa*' *L.* (1950)
19 Leandre Cervera, *L'acció de les radiacions sobre les cèl·lules vives* (1950)
20 Leandre Cervera (cur.), *Homenatge a Ramon Turró. Recull d'estudis sobre la seva vida i la seva obra* (1950)
21 Eduard Fontserè, *La tramuntana empordanesa i el mestral del golf de Sant Jordi* (1950)
22 Josep-Ramon Guix, *Potencialització dels antibiòtics per mitjà dels raigs X* (1953)
23 Francesc Masclans, *Els noms vulgars de les plantes a les terres catalanes* (1954)
24 Josep Laporte, *Noves idees sobre farmacologia de la coagulació* (1954)
25 P[are] Salvador de les Borges, *Arnau de Vilanova moralista* (1957)
26 Oriol de Bolòs, *El paisatge vegetal de dues comarques naturals: la Selva i la Plana de Vic* (1959)
27 Delfí Abella, *L'orientació antropològica existencial de la psiquiatria* (1962)
28 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1963), vol. 18
29 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1964), vol. 19
30 Francesc Masclans, *Flora del Segrià i l'Urgell, a la plana occidental catalana* (1966)
31 Maria-Antònia Massanell, *Algues aquàtiques del Parc d'Aigües Tortes* (1966)
32 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1966), vol. 20
33 Ferran Sunyer i Balaguer, *Sobre un espai de funcions enteres d'ordre infinit* (1967)
34 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1967), vol. 21
35 Fernando González-Núñez, *La hidronefrosi. La seva correcció quirúrgica* (1967)
36 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1967), vol. 22
37 Josep Vigo, *La vegetació del massís de Penyagolosa* (1968)
38 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1968), vol. 23
39 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1968), vol. 24
40 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1968), vol. 25
41 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1969), vol. 26
42 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1969), vol. 27
43 August Corominas, *Contribució a l'estudi bioquímic dels lípids: lipidúries* (1970)
44 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1970), vol. 28
45 Enric Casassas, *Estudi sobre la reactivitat envers els ions metàl·lics d'alguns reactius quelatants amb grups-SH i sobre la formació de complexos per alguns mercaptoàcids alifàtics* (1971)
46 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1971), vol. 29
47 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1971), vol. 30
48 Joan Alsina, *La mercaptohidroquinona com a reactiu en l'anàlisi inorgànica* (1972)
49 Salvador Miracle, *Una formulació variacional de la mecànica estadística dels sistemes infinits i la regla de les fases de Gibbs* (1972)
50 *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1972), vol. 31
51 Robert Bargalló, *Morfologia ultrastructural de l'espermiogènesi de «Sagitta setosa»* (1972)

**52** *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1973), vol. 32
**53** Joan Riera, *Idealisme i positivisme en la medicina catalana del segle xix* (1973)
**54** Francesc Masclans, *Els noms catalans dels bolets. (Ordre dels agaricals)* (1975)
**55** *Treballs de la Societat Catalana de Biologia* (1976), vol. 33
**56** Josep M. Núñez i Josep Pérez, *Distribució del balanç de la radiació a Catalunya* (1977)
**57** Salvador Alegret, *Diccionari de l'utillatge químic* (1977)
**58** Lluís Marquet, *Vocabulari de luminotècnia* (1979)
**59** M. Àngels Cardona, *Funcionalisme i ecologia d'algunes comunitats vegetals barcelonines* (1980)
**60** Ramon Folch i Guillèn, *La flora de les comarques litorals compreses entre la riera d'Alforja i el riu Ebre* (1980)
**61** *Centenari de la naixença d'Albert Einstein* (1981)
**62** Daniel de Mas, *La geomorfologia del Vallès Oriental* (1981)
**63** Josep M. Drudis, *Síntesi de compostos policíclics pentagonals* (1982)
**64** Joan J. Guimerà, *Estudi estructural de les zones de fractura de Garraf i de Vallcarca (massís de Garraf)* (1982)
**65** Jaume Agustí, *Ciència i tècnica a Catalunya en el segle xviii. La introducció de la màquina de vapor* (1983)
**66** Enric Ras, *Directrius per a un enllaç Mallorca-Eivissa de transmissió d'energia mitjançant corrent continu* (1982)
**67** Joan J. Guinovart, Àngels Mor i Emili Itarte, *Estudi de les proteïno-quinases independents d'AMP cíclic de fetge de rata* (1983)
**68** Ramon M. Masalles, *Flora i vegetació de la Conca de Barberà* (1983)
**69** Ramon Lapiedra, *Les equacions de la mecànica relativista predictiva. Una família de solucions* (1983)
**70** Antoni Méndez, *Cotes sobre l'aparent violació de la simetria d'inversió temporal a les interaccions febles* (1984)
**71** M. Àngels Marquès, *Les formacions quaternàries del delta del Llobregat* (1984)
**72** Joan Manuel Vilaplana, *Estudi del glacialisme de les valls de la Valira d'Ordino i d'Arinsal (Andorra)* (1984)
**73** Joandomènec Ros, Ignasi Olivella i Josep M. Gili, *Els sistemes naturals de les illes Medes* (1984)
**74** Esmaragda Caus, *Biostratigrafia i micropaleontologia de l'Eocè mitjà i superior del Pre-pirineu català* (1984)
**75** Manuel Castellet (cur.), *El desenvolupament de les matemàtiques al segle xix* (1984)
**76** David Jou, *Equacions de Gibbs generalitzades i extensió de la termodinàmica dels processos irreversibles* (1984)
**77** Joaquim Casal, *Contribució a l'estudi de la fluïdització homogènia* (1984)
**78** Rosa M. Cros, *Flora briològica del Montnegre* (1985)
**79** Josep A. Plana, *Estudi climàtic i balanç hídric de la conca de la Noguera Ribagorçana* (1985)
**80** Néstor L. Hladun, *Aportació a la flora, morfologia i vegetació dels líquens de la part alta del Montseny* (1985)
**81** Oriol Riba i Salvador Reguant, *Una taula dels temps geològics* (1986)
**82** Adriana Garau, *Deambulació al camp obert i postulat dels fàrmacs d'Eysenck* (1986)

83 Joan M. Mata, *Estructura fina del camp de vent superficial i difusió de contaminants en certes situacions de mesoscala* (1986)
84 Mikel Zabala, *Fauna dels briozous dels Països Catalans* (1986)
85 Joan de Solà-Morales, *Equacions de Navier-Stokes en un canal amb obstacle* (1986)
86 Josep Miret, *Contribució a l'estudi de la imatge psicològica de la pell* (1986)
87 Daniel de Mas, *El relleu del Vallès Occidental. (L'evolució geomorfològica quaternària del Vallès Occidental)* (1989)
88 Xavier Font, *Estructura, tipologia i ecologia de les pastures montanes de la Cerdanya* (1989)
89 Josep M. Tura, Joan Rodés i Adolf Traveria, *Estudi per tècniques físiques d'anàlisi (SEM, EDX, SIMS, LAMMA, XRD i XRF) de microcristalls exògens i endògens i de traces metàl·liques en patologia humana* (1989)
90 Àngel M. Romo, *Flora i vegetació del Montsec. (Pre-pirineus catalans)* (1989)
91 M. Victòria Vives, *Contribució al coneixement de la fauna herpetològica de Catalunya* (1990)
92 Albert Permanyer, *Sedimentologia i diagènesi dels esculls miocènics de la conca del Penedès* (1990)
93 Josep M. Mata, *Els minerals de Catalunya* (1990)
94 Carme Junqué, *Desorganització diferencial del català i el castellà en afàsics bilingües* (1990)
95 Jordi Casal, *Contribució a l'estudi de la leucosi bovina. Mètodes de diagnòstic i prevalença a Catalunya* (1990)
96 Josep M. Montaner, *La modernització de l'utillatge mental de l'arquitectura a Catalunya: 1714-1859* (1990)
97 F. Xavier de las Heras, *Geoquímica orgànica de conques lacustres fòssils* (1991)
98 Cèsar Blanché, *Revisió biosistemàtica del gènere 'Delphinium' L. a la península Ibèrica i a les illes Balears* (1991)
99 Empar Carrillo i Josep M. Ninot, *Flora i vegetació de les valls d'Espot i de Boí* (1992), 2 v.
100 Josep Amat i Enric Casassas (cur.), *Trenta-dos aspectes de ciència i tecnologia* (1995)
101 Enric Ballesteros, *Els vegetals i la zonació litoral: espècies, comunitats i factors que influeixen en la seva distribució* (1992)
102 Joaquim Sales, *Composts organometàl·lics d'elements de transició amb grups policlorofenil. Influència dels efectes estèrics i electrònics en llur estabilitat* (1992)
103 Assumpció Malgosa, *La població talaiòtica de Mallorca. Les restes humanes de l'illot des Porros (s. VI-II aC)* (1992)
104 Josep Chabàs, *L'astronomia de Jacob ben David Bonjorn* (1992)
105 Xavier Font, *Estudis geobotànics sobre els prats xeròfils de l'estatge montà dels Pirineus* (1993)
106 Agustí Reventós, *Geometria axiomàtica* (1993)
107 Josep Pla, *Axiomes alternatius de la teoria de conjunts i llur influència en matemàtiques* (1993)
108 Christian Papió, *Ecologia del foc i regeneració en garrigues i pinedes mediterrànies* (1994)
109 Teresa Franquesa, *El paisatge vegetal de la península del cap de Creus* (1995)
110 Boris P. Sobolev (ed.), *Multicomponent crystals based on heavy metal fluorides for radiation detectors* (1994)

**111** Ferran SAGARRA, *Barcelona, ciutat de transició (1848-1868). El projecte urbà a través dels treballs de l'arquitecte Miquel Garriga i Roca* (1996)

**112** David JOU, *Matèria i materialisme* (1997)

**113** Mireia GIRALT, *Líquens epífits i contaminació atmosfèrica a la plana i les serralades litorals tarragonines* (1996)

**114** Oriol de BOLÒS, *La vegetació de les illes Balears. Comunitats de plantes* (1996)

**115** Romà TAULER, *Anàlisis de mescles mitjançant resolució multivariant de corbes* (1997)

**116** Josep YLLA, *Història natural del lepidòpter 'Graellsia isabelae' (Graells, 1849)* (1997)

**117** Carles CASTELL, *Ecofisiologia de dues espècies rebrotadores mediterrànies: l'arboç ('Arbutus unedo') i l'alzina ('Quercus ilex')* (1997)

**118** Eulàlia PLANAS, *Incendis d'hidrocarburs. Efectes sobre equips de procés* (1998)

**119/1** Lluís CORTADA, *Estructures territorials, urbanisme i arquitectura poliorcètics a la Catalunya preindustrial*, vol. 1, *De l'antiguitat al segle XVII* (1998)

**119/2** Lluís CORTADA, *Estructures territorials, urbanisme i arquitectura poliorcètics a la Catalunya preindustrial*, vol. 2, *Segles XVIII i XIX* (1998)

**120** Maria BOSCH, *Biologia de la reproducció de la tribu 'Delphinieae' a la Mediterrània occidental* (1999)

**121** Carles FERNÀNDEZ, *Morfoestructura i paleobiologia dels ortofragmínids de la Mesogea (Discocyclinidae i Orbitoclypeidae, Foraminifera)* (1999)

**122** Joan SIMON i Josep VICENS, *Estudis biosistemàtics en 'Euphorbia' L. a la Mediterrània occidental* (1999)

**123** Estanislau ROCA, *Montjuïc, la muntanya de la ciutat* (2a ed., 2000; la 1a ed. [1994] no fou publicada per l'IEC)

**124** Boris P. SOBOLEV, *The rare earth trifluorides*, part 1, *The high temperature chemistry of the rare earth trifluorides* (2000)

**125** Carles MARTÍN-CLOSAS, *Els caròfits del Juràssic superior i el Cretaci inferior de la península Ibèrica = Upper Jurassic and lower Cretaceous charophytes from the Iberian Peninsula* (2000)

**126** Sergi BONET, M[ailo] BRIZ, E[lisabet] PINART, S[ílvia] SANCHO, N[úria] GARCIA-GIL i E[lena] BADIA, *Morfologia espermàtica en porcí = Morfología espermática en porcino = Morphology of boar spermatozoa* (2000)

**127** Montserrat BOQUERAS, *Líquens epífits i fongs liquenícoles del sud de Catalunya. Flora i comunitats* (2000)

**128** Lluís MERCADER, Domènec LLORIS i Jaume RUCABADO, *Tots els peixos del mar català. Diagnosi i claus d'identificació* (2001; 2a ed., actual., 2003)

**129** Anna M. ROMANÍ, *Biofilms fluvials. Metabolisme heterotròfic i autotròfic en rius mediterranis* (2001)

**130** Lluís ROVIRA, Pau SENRA i David JOU, *Estudis bibliomètrics sobre la recerca en física a Catalunya* (2001)

**131** *El delta de l'Ebre. Estudi multidisciplinari* (2001)

**132** Boris P. SOBOLEV, *The rare earth trifluorides*, part 2, *Introductions to materials science of multicomponent metal fluoride crystals* (2001)

**133** Jacint CORBELLA i Edelmira DOMÈNECH, *Científics del Priorat* (2002)

**134** *Una mostra de la biologia i la patologia cel·lulars del sistema nerviós a Catalunya. Cent cinquantè aniversari del naixement del Santiago Ramón y Cajal* (2003)

**135** Carles BAS, Francesc MAYNOU, Francesc SARDÀ i Jordi LLEONART, *Variacions demogràfiques a les poblacions d'espècies demersals explotades. Els darrers quaranta anys a Blanes i Barcelona* (2003)

**136** Emil G. Racovitza, *Assaig sobre els problemes bioespeleològics* (2004)
**137** Àngels Longán, *Els líquens epífits com a indicadors de l'estat de conservació del bosc mediterrani* (2006)
**138** Josep Gesti, *El poblament vegetal dels Aiguamolls de l'Empordà* (2006)
**139** M. Carme Casas, *Estudi tipològic, ecològic i funcional de les pastures de la plana de Vic* (2008)
**140** Jacint Corbella, *L'Institut de Fisiologia de Barcelona (1920-1939)* (2009)
**141** Esther Clavero, *Diatomees d'ambients hipersalins costaners. Taxonomia, distribució i empremtes en el registre sedimentari* (2009)
**142** Teresa Buchaca, *Pigments indicadors: estudi del senyal en estanys dels Pirineus i de la seva aplicació en paleolimnologia* (2009)
**143** Alfons Carpio, *Ciència i política exterior francesa a l'Espanya de Franco: el cas dels físics catalans* (2010)
**144** Manuel Castellet (cur.), *Selecta Ferran Sunyer i Balaguer* (2012)
**145** Jacint Corbella, *Metges i medicina d'Occitània* (2012)
**146** Núria Carrera, *Inversió tectònica i evolució estructural de la Cordillera Oriental meridional (Valles Calchaquíes, NW de l'Argentina)* (2013)
**147** Enric Ortega, *Diccionari etimològic dels noms científics dels ocells dels Països Catalans* (2017)
**148** *Natura: ús o abús? (2018-2019). Ús i abús de la natura, impactes i propostes de gestió. El cas de Catalunya com a paradigma* (2021)
**149** Maria del Mar Rovira, *Casa de la Congregació de la Missió a Barcelona. De l'església de Sant Sever i Sant Carles Borromeu dels paüls a la parròquia mercedària de Sant Pere Nolasc (1703-2017)* (2021)
**150** Sergi González, *Precipitació i circulacions mesoescalars en zones d'orografia complexa* (2021)
**151** Natàlia Blázquez-Pallí, *Estratègies de bioremediació en aqüífers contaminats. Mètodes per investigar la viabilitat d'aquests processos i per implementar* in situ *aquesta tecnologia d'una manera exitosa* (2022)
**152** Guillem Blanco, *La conjectura de Yano* (2023)

INSTITVT D'ESTVDIS CATALANS
MCMVII

9 788499 657066